

**RENDICONTI**  
 DELLE SEDUTE  
**DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI**  
**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

*Seduta del 23 aprile 1911.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

**MEMORIE E NOTE**  
**DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI**

**Matematica.** — *Sopra le funzioni permutabili di 2<sup>a</sup> specie e le equazioni integrali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Consideriamo le funzioni finite e continue

$$f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x) ; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x),$$

quindi poniamo

$$\int_0^1 \varphi_s(x) f_i(x) dx = \lambda_{si},$$

e supponiamo che il determinante delle  $\lambda_{si}$  sia diverso da zero.

Formiamo adesso le funzioni

$$(I) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} f_i(x) \varphi_s(y)$$

$$(II) \quad \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n b_{is} f_i(x) \varphi_s(y).$$

Se operiamo sopra  $F$  e  $\Phi$  una composizione di seconda specie <sup>(1)</sup> otterremo la funzione

$$\ddot{F} \ddot{\Phi}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n c_{is} f_i(x) \varphi_s(y),$$

<sup>(1)</sup> *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Rend. Ac. dei Lincei, Seduta 20 febbraio 1910, § 8.

essendo

$$c_{is} = \sum_h \sum_k a_{ih} \lambda_{hk} \lambda_{ks}.$$

Per rappresentare questo scriviamo le sostituzioni

$$(1) \quad A = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{array} \right\}, \quad (2) \quad B = \left\{ \begin{array}{l} b_{11}, b_{12}, \dots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots b_{nn} \end{array} \right\}$$

$$(3) \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots \lambda_{1n} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots \lambda_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots \lambda_{nn} \end{array} \right\}, \quad (4) \quad C = \left\{ \begin{array}{l} c_{11}, c_{12}, \dots c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \dots c_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots c_{nn} \end{array} \right\}$$

ed avremo

$$C = A \mathcal{A} B,$$

ove il secondo membro denota il prodotto delle tre sostituzioni  $A \mathcal{A} B$ .

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie delle funzioni (I) e (II) è espressa da

$$(5) \quad A \mathcal{A} B = B \mathcal{A} A.$$

2. Ciò premesso osserviamo che la relazione precedente è equivalente all'altra

$$(5') \quad (\mathcal{A} A) (\mathcal{A} B) = (\mathcal{A} B) (\mathcal{A} A),$$

dunque, condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie di  $F$  e  $\Phi$  è che le sostituzioni  $\mathcal{A} A$  e  $\mathcal{A} B$  siano fra loro permutabili.

Nella ipotesi in cui  $B$  si riduca all'identità, cioè

$$B = \left\{ \begin{array}{l} 1, 0, \dots 0 \\ 0, 1, \dots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, \dots 1 \end{array} \right\} = 1$$

e quindi

$$(6) \quad \Phi(x, y) = \sum_1^n f_i(x) \varphi_i(y)$$

la condizione precedente si riduce a

$$\mathcal{A} A = A \mathcal{A},$$

ossia che le sostituzioni  $\mathcal{A}$  e  $A$  siano fra loro permutabili, mentre se  $\mathcal{A} = 1$  essa diviene

$$AB = BA,$$

ossia che siano permutabili le sostituzioni  $B$  ed  $A$ .

3. Ho studiato la questione delle permutabilità delle sostituzioni nei Preliminari della seconda parte della mia Memoria: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* <sup>(1)</sup>.

Rimando quindi alla suddetta Memoria per la trattazione del problema di trovare tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Perciò nota la funzione (II) potremo avere tutte le funzioni della forma (I) permutabili di 2<sup>a</sup> specie con essa.

4. Nella Memoria adesso citata <sup>(2)</sup> ho dimostrato il teorema seguente: *La condizione necessaria e sufficiente affinché le sostituzioni permutabili con una data sostituzione siano permutabili fra loro è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro*. Quando questa condizione è verificata ho chiamato la sostituzione elementare.

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le funzioni (I) permutabili colla (II) siano permutabili fra loro è che il prodotto delle sostituzioni  $\mathcal{A}B$  sia elementare.

5. Vogliamo dare subito una applicazione dei precedenti risultati ad una questione di equazioni integrali.

Supponiamo  $\mathcal{A}B$  elementare e siano  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_m, m+1$  funzioni della forma (I) permutabili di 2<sup>a</sup> specie con (II): esse saranno permutabili fra loro.

Proponiamoci il problema di trovare una funzione  $F$ , avente la forma (I) e permutabile con (II), la quale verifichi l'equazione integrale di grado  $m$

$$(III) \quad \ddot{F}_0 \ddot{F}^m + \ddot{F}_1 \ddot{F}^{m-1} + \ddot{F}_2 \ddot{F}^{m-2} + \dots + \ddot{F}_{m-1} \ddot{F} + F_m = 0.$$

Posto

$$F_h = \sum_1^n \sum_1^m a_{is}^{(h)} f_i(x) \varphi_s(y), \quad (1)$$

$$\mathcal{A}_h = \left\{ \begin{array}{c} a_{11}^{(h)}, a_{12}^{(h)}, \dots, a_{1n}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)}, a_{22}^{(h)}, \dots, a_{2n}^{(h)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}^{(h)}, a_{n2}^{(h)}, \dots, a_{nn}^{(h)} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

dovremo avere

$$(III_a) \quad (\mathcal{A}A_0)(\mathcal{A}A)^m + (\mathcal{A}A_1)(\mathcal{A}A)^{m-1} + (\mathcal{A}A_2)(\mathcal{A}A)^{m-2} + \dots + \\ + (\mathcal{A}A_{m-1})(\mathcal{A}A) + \mathcal{A}A_m = 0.$$

(1) Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, tomo XII.

(2) Preliminari, § 6.

Ora, riducendo le sostituzioni  $\mathcal{A}A_0, \mathcal{A}A_1, \dots, \mathcal{A}A_m, \mathcal{A}A$ , alla forma normale <sup>(1)</sup> potremo scrivere

$$\mathcal{A}A_h = T^{-1} \left\{ \prod_{1}^p R_{h,g} \right\} T,$$

$$\mathcal{A}A = T^{-1} \left\{ \prod_{1}^p R_g \right\} T,$$

ove

$$R_{h,g} = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{h,g}^{(1)}, 0 & , 0 & , \dots 0 \\ \alpha_{h,g}^{(2)}, \alpha_{h,g}^{(1)} & , 0 & , \dots 0 \\ \alpha_{h,g}^{(3)}, \alpha_{h,g}^{(2)} & , \alpha_{h,g}^{(1)} & , \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h,g}^{(g)}, \alpha_{h,g}^{(g-1)}, \alpha_{h,g}^{(g-2)}, \dots \alpha_{h,g}^{(1)} \end{array} \right\}$$

$$R_g = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_g^{(1)}, 0 & , 0 & , \dots 0 \\ \alpha_g^{(2)}, \alpha_g^{(1)} & , 0 & , \dots 0 \\ \alpha_g^{(3)}, \alpha_g^{(2)} & , \alpha_g^{(1)} & , \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_g^{(g)}, \alpha_g^{(g-1)}, \alpha_g^{(g-2)}, \dots \alpha_g^{(1)} \end{array} \right\},$$

mentre

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = n,$$

e  $T$  è una sostituzione a determinante diverso da zero. Ne segue

$$(7) \quad R_{0,g} R_g^m + R_{1,g} R_g^{m-1} + R_{2,g} R_g^{m-2} + \dots + R_{m-1,g} R_g + R_{m,g} = 0. \quad (g = 1, 2, \dots, p).$$

Potremo dunque prendere  $\alpha_g^{(1)}$  eguale ad una qualunque delle radici della equazione algebrica di grado  $m$

$$(8) \quad \alpha_{0,g}^{(1)} x^m + \alpha_{1,g}^{(1)} x^{m-1} + \alpha_{2,g}^{(1)} x^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1,g}^{(1)} x + \alpha_{m,g}^{(1)} = 0.$$

Ottenuto  $\alpha_g^{(1)}$ , i valori di  $\alpha_g^{(2)}, \alpha_g^{(3)}, \dots, \alpha_g^{(g)}$ , tali che la (7) sia soddisfatta, si calcoleranno risolvendo successive equazioni lineari.

Le diverse sostituzioni  $\mathcal{A}A$ , e quindi le diverse  $A$ , che verificano la (III<sub>a</sub>) si avranno dunque mediante la risoluzione di equazioni algebriche (8) di

(1) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Parte prima. Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, vol. VI, Preliminari, § 2. Vedi anche Parte seconda (prec. citata), Preliminari, § 6.*

grado  $m$  e di equazioni lineari, e a seconda delle combinazioni delle varie radici delle equazioni (8) si otterranno altrettante soluzioni.

Ad ogni sostituzione  $A$  che verifica la (III<sub>a</sub>) corrisponderà una funzione  $F$  che soddisfa l'equazione integrale (III).

6. Sia ora  $\Psi(x, y)$  una funzione qualunque permutabile di 2<sup>a</sup> specie colla (II). Poniamo

$$e_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, y) \varphi_r(x) f_s(y) dx dy ,$$

$$E = \begin{Bmatrix} e_{11}, e_{12}, \dots e_{1n} \\ e_{21}, e_{22}, \dots e_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ e_{n1}, e_{n2}, \dots e_{nn} \end{Bmatrix} .$$

In virtù delle permutabilità avremo

$$\int_0^1 \Psi(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi, y) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(\xi) d\xi ,$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y) dx dy \int_0^1 \Psi(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y) dx dy \int_0^1 \Psi(\xi, y) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(\xi) d\xi , \end{aligned}$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \Sigma_i \Sigma_s b_{is} \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, \xi) \varphi_h(x) f_i(\xi) d\xi d\xi \int_0^1 \varphi_s(y) f_r(y) dy = \\ = \Sigma_i \Sigma_s b_{is} \int_0^1 \varphi_h(x) f_i(x) dx \int_0^1 \int_0^1 \Psi(\xi, y) \varphi_s(\xi) f_r(y) d\xi dy \end{aligned}$$

d'onde

$$(9) \quad EBA = ABE .$$

Scriviamo

$$\Psi(x, y) = \Sigma_h \Sigma_k m_{hk} f_h(x) \varphi_k(y) + \Theta(x, y)$$

colla condizione

$$\int_0^1 \int_0^1 \Theta(x, y) \varphi_r(x) f_s(y) dx dy = 0 . \quad (r, s = 1, 2, \dots n)$$

Posto

$$M = \begin{Bmatrix} m_{11}, m_{12}, \dots m_{1n} \\ m_{21}, m_{22}, \dots m_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ m_{n1}, m_{n2}, \dots m_{nn} \end{Bmatrix} ,$$

sarà

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}.$$

Quindi, in virtù della (9),

$$(\mathbf{A} \mathbf{M})(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \mathbf{B})(\mathbf{A} \mathbf{M}),$$

onde la funzione

$$\Sigma_h \Sigma_k m_{hk} f_h(x) \varphi_k(y)$$

sarà permutabile colla (II) e perciò anche  $\Theta$  sarà permutabile colla (II), cioè

$$\int_0^1 \Theta(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi = \int_0^1 \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(\xi) \Theta(\xi, y) d\xi.$$

Moltiplicando per  $f_h(y) dy$  e integrando fra 0 e 1 si avrà

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_h(y) dy \int_0^1 \Theta(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi = \\ = \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \int_0^1 \int_0^1 \Theta(\xi, y) \varphi_s(\xi) f_h(y) d\xi dy = 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\Sigma_i \Sigma_s b_{is} \lambda_{sh} \int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) d\xi = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ne segue, supposto il determinante della sostituzione  $B\mathbf{A}$  diverso da zero,

$$(10) \quad \int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) d\xi = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

In modo perfettamente analogo si ha

$$(10') \quad \int_0^1 \Theta(\xi, y) \varphi_i(\xi) d\xi = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ora la funzione più generale che soddisfa le (10) e (10') è (1)

$$\begin{aligned} (11) \quad \Theta(x, y) = \Omega(x, y) - \sum_1^n \sum_1^n \mu_{is} \varphi_s(y) \int_0^1 \Omega(x, \xi) f_i(\xi) d\xi \\ - \sum_1^n \sum_1^n \mu_{is} f_i(x) \int_0^1 \Omega(\xi, y) \varphi_s(\xi) d\xi + \\ + \Sigma_h \Sigma_k f_h(x) \varphi_k(y) \Sigma_i \Sigma_s \mu_{ih} \mu_{ks} \int_0^1 \int_0^1 \Omega(\xi, \eta) \varphi_s(\xi) f_i(\eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

(1) Cfr. Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*. Rend. Accad. Lincei, Seduta 7 giugno 1908.

ove

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{11}, \mu_{12}, \dots \mu_{1n} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \dots \mu_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots \mu_{nn} \end{array} \right\} = \mathcal{A}^{-1}$$

e  $\Omega(x, y)$  è una funzione arbitraria. Prendendo dunque la funzione più generale della forma (I) permutabile di 2<sup>a</sup> specie con (II), ottenuta colla regola delle sostituzioni permutabili, e aggiungendovi la (11) si otterrà la funzione più generale  $\Psi(x, y)$  permutabile con (II).

7. Ritornando alla equazione integrale (III) di grado  $m$ , osserviamo che, se alla soluzione  $F$ , avente la forma (I), aggiungiamo la funzione  $\Theta$  otterremo sempre, in virtù delle relazioni (10) e (10'), una funzione che soddisfa l'equazione integrale stessa, ed avremo così la funzione più generale permutabile con la (II) che vi soddisfa.

8. Se prendiamo

$$f_i(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

e supponiamo che queste funzioni siano normalizzate, sarà  $A = 1$  e

$$\Phi(x, y) = \sum_{1}^n \sum_{1}^n b_{is} f_i(x) f_s(y),$$

$$F(x, y) = \sum_{1}^n \sum_{1}^n a_{is} f_i(x) f_s(y).$$

Quando le funzioni  $f_1, f_2, \dots f_n$  fanno parte di un sistema normalizzato  $f_1, f_2, \dots f_N$ , (essendo  $N > n$ ) otterremo delle funzioni  $\Theta$  che verificano le (10) e (10') prendendo

$$\Theta = \sum_{n+1}^N \sum_{n+1}^N q_{is} f_i(x) f_s(y),$$

ove le  $q_{is}$  sono costanti arbitrarie. È facile estendere il risultato al caso  $N = \infty$ .

9. Mi sono permesso di presentare le precedenti osservazioni in occasione della pubblicazione dei risultati eleganti e di notevole interesse dovuti al prof. Sinigaglia.

Mi sembra che, ponendo in luce il collegamento della questione delle funzioni permutabili di 2<sup>a</sup> specie con quella della permutabilità delle sostituzioni, si riconosca la vera natura del problema e si possa penetrare nella sua intima essenza. Nel tempo stesso possono così anche ottersi varie estensioni e delle applicazioni del problema medesimo come abbiamo veduto nel § 5.

Vi è poi da osservare che i metodi che servono per le funzioni permutabili di 1<sup>a</sup> specie sono diversi da questo applicabili alle funzioni permutabili di 2<sup>a</sup> specie.

**Matematica. — *Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da Lord Rayleigh.* Nota del Socio T. LEVIVITA.**

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica. — *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie.* Nota del Corrisp. G. LAURICELLA.**

In una Nota, presentata all'Accademia nella seduta del 7 giugno 1908 (¹), ho introdotto, per lo studio e per la risoluzione dell'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie a limiti costanti, la considerazione delle funzioni ortogonali di Schmidt, ed ho scritti, in termini noti, i coefficienti dello sviluppo della soluzione della equazione integrale medesima in serie di funzioni ortogonali, dimostrando (§ 4<sub>1</sub>, pag. 780) che se essa serie, moltiplicata per il nucleo, è integrabile termine a termine in tutto il campo, rappresenterà certamente una soluzione dell'equazione integrale data. Nella medesima Nota ed in un'altra del 6 settembre 1908 (²), ho date poi due condizioni necessarie (§ 3<sub>1</sub>, pag. 780 della prima Nota; § 2, pag. 195 della seconda Nota) per l'esistenza di una soluzione di una equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie. In seguito il Picard (³), usufruendo di un noto teorema di Riesz, ha dimostrato, per il caso di un nucleo chiuso, che queste condizioni, le quali si riducono allora ad una solamente, sono necessarie e sufficienti; e subito dopo io, guidato dall'idea di Picard, di usufruire cioè del teorema di Riesz, ho dimostrato (⁴) che anche nel caso di un nucleo non chiuso, le due condizioni necessarie, trovate nelle precedenti mie Note, sono sufficienti.

Qui mi propongo di dimostrare che, in virtù di un recente teorema di Weyl (⁵), quando è soddisfatta una delle due condizioni (quella comune a tutti i casi) di esistenza della soluzione dell'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie,

(¹) *Sopra alcune equazioni integrali.* Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVII, serie 5<sup>a</sup>.

(²) *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate.* Ibid.

(³) *Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce, ecc.* Comptes rendus, 14 juin 1909.

(⁴) *Sull'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5<sup>a</sup>.

(⁵) *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen forschreiten.* Math. Annalen, Bd. LXVII, 1909. Cfr. M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une function, ecc.* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. XXX.

il corrispondente sviluppo in serie di funzioni ortogonali, per un conveniente agruppamento dei suoi termini, è convergente in tutto il campo, eccettuato al più un insieme di punti di misura nulla, ed ancora che questo sviluppo, così modificato, moltiplicato per una funzione *sommabile* (cioè integrabile nel senso di Lebesgue) insieme al suo quadrato, è integrabile termine a termine; sicchè, supposta soddisfatta anche l'altra delle due condizioni di esistenza, *esso sviluppo rappresenterà sempre nel campo che si considera (eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla) una soluzione dell'equazione integrale data*. In questo modo si ha una rappresentazione analitica della soluzione di un'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie, tutte le volte che essa soluzione esiste. L'indeterminazione dei valori di questa soluzione in un insieme di punti di misura nulla, dipende evidentemente dalla natura stessa del problema; anzi si possono fissare ad arbitrio in questi punti, quando si presentano, i valori della soluzione. La dimostrazione di questo teorema rappresenta nello stesso tempo una nuova dimostrazione della sufficienza delle condizioni di esistenza di una soluzione delle equazioni integrali di 1<sup>a</sup> specie. È per questa ragione che nella presente Nota presuppongo solamente la conoscenza del teorema di Weyl e della teoria delle funzioni ortogonali di Schmidt.

È importante osservare che, se il nucleo dell'equazione integrale non ha discontinuità alcuna nel suo campo di variabilità, le corrispondenti funzioni ortogonali non avranno discontinuità; e quindi, poichè, in virtù del teorema di Weyl, la serie che rappresenta la soluzione, modificata nel modo anzidetto, è equiconvergente in qualunque campo che escluda i punti di indeterminazione (i quali formano, come si è detto, un insieme di misura nulla) con segmenti che li contengano nel loro interno (*convergente uniformemente in generale*), ne segue che le discontinuità della soluzione della equazione integrale potranno presentarsi al più nei punti di questo insieme di misura nulla; per modo che essa soluzione sarà certamente integrabile nel senso di Riemann; e quindi i risultati stessi devono potersi dimostrare senza ricorrere al concetto di integrale di Lebesgue. La medesima osservazione può farsi nel caso in cui il nucleo ha nel suo campo di variabilità un numero finito di punti e di linee di discontinuità; e non è escluso che essa possa ripetersi in casi nei quali il nucleo, pur avendo un numero infinito di punti e di linee di discontinuità, sia integrabile nel senso di Riemann<sup>(1)</sup>.

In fine della presente Nota dò poi un metodo per ricondurre la risoluzione di un'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie a nucleo non simmetrico, alla risoluzione di un'equazione pure di 1<sup>a</sup> specie a nucleo simmetrico.

(1) Tale è ad es. il caso di una funzione che abbia un numero infinito di rette di discontinuità parallele ad uno dei due assi, supposto che i punti di intersezione di queste rette con l'altro asse formino un insieme di misura nulla.

1. Il teorema di Weyl si può così enunciare: Se

$$f_1(s), f_2(s), \dots$$

è una serie di funzioni sommabili (integrabili nel senso di Lebesgue) nel campo  $\overline{ab}$ , insieme ai loro quadrati, la quale sia *convergente in media*, la quale cioè soddisfaccia alla condizione:

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2 ds = 0;$$

indicando con  $\varepsilon_m$  il limite superiore dei valori dell'espressione:

$$\int_a^b \{f_m(s) - f_{m+p}(s)\}^2 ds, \quad (p = 1, 2, \dots),$$

ed estraendo dalla serie delle  $\varepsilon_m$  una qualsiasi serie convergente:

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \dots,$$

si avrà che la corrispondente serie di funzioni:

$$(1) \quad f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$$

convergerà, secondo una locuzione introdotta da Weyl stesso, *uniformemente in generale* nel campo  $\overline{ab}$ , ossia, indicando con  $\delta$  una quantità positiva ad arbitrio, la serie (1) convergerà in ugual grado in un campo  $B_\delta$ , facente parte di  $\overline{ab}$ , e di cui la misura non è inferiore a  $b - a - \delta$ , verso una funzione  $f(s)$ . La funzione  $f(s)$  sarà così determinata nel campo  $\overline{ab}$ , astrazione fatta al più per i punti di un insieme di misura nulla; ed ancora la funzione  $f(s)$  sarà sommabile insieme al suo quadrato e si avrà:

$$(2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2 ds = 0.$$

Importa aggiungere che, in virtù della (2), qualunque altra serie convergente uniformemente in generale nel campo  $\overline{ab}$ , che si può trarre dalla serie data  $f_1(s), f_2(s), \dots$  convergerà sempre verso la funzione  $f(s)$ ; e convergerà pure verso la funzione  $f(s)$  in un certo campo  $\overline{\alpha\beta}$ , contenuto in  $\overline{ab}$ , qualunque serie convergente in  $\overline{\alpha\beta}$ , che si può trarre dalla data.

2. Sia  $K(s, t)$  una funzione sommabile insieme al suo quadrato nel campo  $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$ .

In virtù della teoria di Schmidt (¹), esisterà una serie finita od infinita (numerabile) di coppie di funzioni ortogonali:

$$\varphi_1(s), \psi_1(s); \varphi_2(s), \psi_2(s); \dots$$

ed una corrispondente serie di costanti positive:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots,$$

che avrà il solo punto limite  $\lambda = \infty$ , se sarà infinita, per le quali si abbia:

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int_a^b K(s, t) \psi_i(t) dt,$$

$$\psi_i(s) = \lambda_i \int_a^b K(t, s) \varphi_i(t) dt.$$

Ciò premesso, si consideri l'equazione integrale di 1<sup>a</sup> specie:

$$(3) \quad g(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt;$$

e, supposto che essa ammetta una soluzione  $h(t)$ , si ponga:

$$\begin{aligned} d_v &= \int_a^b g(t) \varphi_v(t) dt = \int_a^b \int_a^b K(\tau, t) h(t) \varphi_v(\tau) dt d\tau = \\ &= \int_a^b h(t) dt \int_a^b K(\tau, t) \varphi_v(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda_v} \int_a^b h(t) \psi_v(t) dt. \end{aligned}$$

Se il quadrato di  $h(t)$  è sommabile nel campo  $\overline{ab}$ , si avrà:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \left\{ h(t) - \sum_1^i d_v \lambda_v \psi_v(t) \right\}^2 dt = \\ &= \int_a^b \{h(t)\}^2 dt + \sum_1^i \lambda_v^2 d_v^2 - 2 \sum_1^i \lambda_v d_v \int_a^b h(t) \psi_v(t) dt = \\ &= \int_a^b \{h(t)\}^2 dt - \sum_1^i \lambda_v^2 d_v^2. \end{aligned}$$

Quindi la serie  $\sum_1^\infty \lambda_v^2 d_v^2$  dovrà essere convergente (²).

Supposto in generale che il nucleo  $K(s, t)$  non sia chiuso, indichiamo con

$$(4) \quad \theta_1(s), \theta_2(s), \dots$$

(¹) *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* Math. Annalen, Bd. LXIII, 1907.

(²) Cfr. il § 2, pag. 195 della seconda delle mie citate Note.

le soluzioni effettive <sup>(1)</sup> dell'equazione:

$$(5) \quad \int_a^b \mathbf{K}(s, t) \theta_i(s) \, ds = 0.$$

Nell'ipotesi sempre che l'equazione (3) ammetta una soluzione, *si deve necessariamente avere* <sup>(2)</sup>:

$$(6) \quad \int_a^b g(s) \theta_i(s) \, ds = \int_a^b h(t) \, dt \int_a^b \mathbf{K}(s, t) \theta_i(s) \, ds = 0.$$

3. Ora *si supponga la serie*  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^2 d_{\nu}^2$  *convergente*. Posto:

$$f_p(s) = \sum_{\nu=1}^p d_{\nu} \lambda_{\nu} \psi_{\nu}(s),$$

sarà, per  $q > p$ ,

$$\int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2 \, ds = \int_a^b \left\{ \sum_{\nu=p+1}^q d_{\nu} \lambda_{\nu} \psi_{\nu}(s) \right\}^2 \, ds = \sum_{\nu=p+1}^q d_{\nu}^2 \lambda_{\nu}^2;$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi fatta,

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2 \, ds = 0.$$

Si avrà inoltre:

$$\varepsilon_m = \sum_{m+1}^{\infty} \lambda_{\nu}^2 d_{\nu}^2.$$

Scelto l'insieme  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}, \dots$  in modo che, come si può sempre fare, la serie

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \dots$$

sia convergente, si consideri la funzione  $f(s)$  verso la quale, in virtù del teorema di Weyl, converge uniformemente nel campo  $B_{\delta}$  ( $\delta$  essendo data ad arbitrio) la corrispondente serie di funzioni:

$$f_{n_1}(s), f_{n_2}(s), \dots$$

(1) Cfr. Lauricella, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XXIX, 1910.

(2) Questa condizione necessaria è contenuta, come dimostrai al § 3 (pag. 73) della terza delle mie citate Note, nella condizione necessaria stabilita al § 3, (pag. 780) della mia prima Nota.

Si ha evidentemente per un indice  $p$  qualsiasi:

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} \{f(s) - K(t, s)\}^2 ds &\leq 2 \int_{B_\delta} \{f(s) - f_p(s)\}^2 ds + \\ &+ 2 \int_{B_\delta} \{f_p(s) - K(t, s)\}^2 ds \leq 2 \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2 ds + \\ &+ 2 \int_a^b \{f_p(s) - K(t, s)\}^2 ds; \end{aligned}$$

e poichè il 3° membro della disuguaglianza non dipende da  $\delta$ , avremo che esiste ed è certamente finito il

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B_\delta} \{f(s) - K(t, s)\}^2 ds = \int_a^b \{f(s) - K(t, s)\}^2 ds;$$

e quindi ancora sarà determinato e finito l'integrale:

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left[ \{f(s)\}^2 + \{K(t, s)\}^2 - \{f(s) - K(t, s)\}^2 \right] ds = \int_a^b K(t, s) f(s) ds.$$

Dalla disuguaglianza:

$$\left( \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\} K(t, s) ds \right)^2 \leq \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2 ds \cdot \int_a^b \{K(t, s)\}^2 ds,$$

e dalla (2) risulta poi:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b K(t, s) f_p(s) ds = \int_a^b K(t, s) f(s) ds;$$

e quindi, essendo:

$$\int_a^b K(t, s) f_p(s) ds = \sum_1^p \lambda_v d_v \int_a^b K(t, s) \psi_v(s) ds = \sum_1^p d_v \varphi_v(t),$$

risulterà:

$$(7) \quad \int_a^b K(t, s) f(s) ds = \sum_1^\infty d_v \varphi_v(t) = g_1(t).$$

Importa notare che, in virtù della disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \left( \sum_1^p d_v \varphi_v(t) \right)^2 &= \left( \int_a^b K(t, s) f_p(s) ds \right)^2 \leq \int_a^b \{K(t, s)\}^2 ds \cdot \int_a^b \{f_p(s)\}^2 ds = \\ &= \int_a^b \{K(t, s)\}^2 ds \cdot \sum_1^p \lambda_v^2 d_v^2 \leq \int_a^b \{K(t, s)\}^2 ds \cdot \sum_1^\infty \lambda_v^2 d_v^2, \end{aligned}$$

la serie al secondo membro della (7) è equiconvergente in tutto il campo  $\overline{ab}$ ; sicchè potremo scrivere per un indice  $\mu$  qualsiasi:

$$\int_a^b g_1(t) \varphi_\mu(t) dt = \sum_{v=1}^{\infty} d_v \int_a^b \varphi_\mu(t) \varphi_v(t) dt = d_\mu;$$

e così si avrà:

$$\int_a^b \varphi_\mu(t) \{g(t) - g_1(t)\} dt = 0,$$

qualunque sia l'indice  $\mu$ . Questo significa (1) che la funzione  $\theta(s) = g(s) - g_1(s)$  è soluzione dell'equazione (5). Ora si ha per una soluzione  $\theta_i(s)$  qualsiasi dell'equazione (5):

$$\int_a^b \theta_i(t) g_1(t) dt = \sum_{v=1}^{\infty} d_v \int_a^b \varphi_v(t) \theta_i(t) dt = 0;$$

per cui si avrà in particolare:

$$\int_a^b \theta(t) g_1(t) dt = 0.$$

Ciò premesso, supponiamo che la funzione  $g(s)$  soddisfaccia alla condizione (6). Si avrà:

$$\int_a^b \theta(t) \cdot g(t) dt = 0;$$

e quindi:

$$\int_a^b \{\theta(t)\}^2 dt = \int_a^b \theta(t) \{g(t) - g_1(t)\} dt = 0.$$

Si avrà dunque in tutto il campo  $\overline{ab}$ , escluso al più un insieme di punti di misura nulla:

$$\int_a^b K(t, s) f(s) ds = g(t).$$

4. Nel caso in cui il nucleo  $K(s, t)$  non è chiuso, se  $\chi(t)$  è la funzione più generale del campo  $\overline{ab}$ , per la quale la serie:

$$\sum_{\mu} \psi_{\mu}(t) \int_a^b \chi(r) \psi_{\mu}(r) dr$$

è integrabile termine a termine nel campo  $\overline{ab}$ , la soluzione più generale dell'equazione:

$$\int_a^b K(s, t) \varrho(t) dt = 0$$

(1) Schmidt, loc. cit., pag. 464.

sarà data da <sup>(1)</sup>:

$$e(t) = \chi(t) - \sum_{\mu} \psi_{\mu}(t) \int_a^b \chi(r) \psi_{\mu}(r) dr;$$

e quindi la soluzione più generale dell'equazione (3) sarà data da:

$$h(s) = f(s) + \varrho(s).$$

Osserviamo che si può scrivere:

$$f(s) = f_{n_1}(s) + \{f_{n_2}(s) - f_{n_1}(s)\} + \{f_{n_3}(s) - f_{n_2}(s)\} + \dots,$$

ossia:

$$(8) \quad f(s) = \sum_1^{n_1} d_v \lambda_v \psi_v(s) + \sum_{n_1+1}^{n_2} d_v \lambda_v \psi_v(s) + \dots$$

Riepilogando si ha così il seguente teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione integrale (3) ammetta una soluzione sommabile insieme al suo quadrato nel campo  $\overline{ab}$ , è che la funzione data  $g(s)$  sia tale che la serie  $\sum_v d_v^2 \lambda_v^2$  converga e che inoltre, nel caso in cui il nucleo  $K(s, t)$  non è chiuso, essa  $g(s)$  soddisfaccia alla condizione (6). Tutte le volte che queste condizioni sono soddisfatte, i termini della serie  $\sum_v d_v \lambda_v \psi_v(s)$  si possono aggruppare ordinatamente in modo che essa risultì convergente uniformemente in generale in tutto il campo  $\overline{ab}$ , e la somma  $f(s)$  di questa serie, così modificata, sarà una soluzione dell'equazione (3). La soluzione più generale di questa equazione si otterrà aggiungendo alla  $f(s)$  l'espressione  $\varrho(s)$ .*

5. Osserviamo che la serie  $\sum_v d_v \lambda_v \psi_v(s)$  in tutti quei punti nei quali è convergente, rappresenta sempre la soluzione  $f(s)$  dell'equazione (3). Infatti ciò è evidente se il punto  $s$  è di quelli nei quali la serie (8) è convergente uniformemente in generale, ossia se il punto  $s$  è di quelli nei quali la  $f(s)$  è determinata. Se il punto  $s$  fa parte del gruppo di misura nulla, nel quale la  $f(s)$  non è determinata, basterà prendere per valore di  $f(s)$  in tale punto il valore della somma  $\sum_v d_v \lambda_v \psi_v(s)$ .

6. Dimostriamo ora che l'equazione integrale (3) a nucleo non simmetrico equivale sempre all'equazione integrale a nucleo simmetrico:

$$(3)' \quad g_1(r) = \int_a^b \underline{K}(s, t) h(t) dt,$$

dove:

$$(9) \quad g_1(r) = \int_a^b K(s, r) g(s) ds, \quad \underline{K}(r, t) = \int_a^b K(s, r) K(s, t) ds.$$

(1) Cfr. Lauricella, la prima delle citate Note, § 6, pag. 482.

Infatti, moltiplicando i membri della (3) per  $K(s, r)$  ed integrando a tutto il campo  $\overline{ab}$ , si ha ovviamente la (3)'; ossia se  $h(t)$  è una soluzione dell'equazione (3), soddisferà all'equazione (3)'.

Viceversa sia  $h(t)$  una soluzione dell'equazione (3)'. Tenendo conto delle (9), si avrà:

$$\int_a^b K(s, r) \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt \right\} ds = 0;$$

e perciò l'espressione:

$$\theta(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt.$$

sarà una soluzione dell'equazione (5). Se il nucleo  $K(s, t)$  è chiuso, dovrà quindi aversi:

$$(10) \quad g(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt$$

in tutto il campo  $\overline{ab}$ , esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla.

Se il nucleo non è chiuso, si rammenti che la  $g(s)$  allora deve soddisfare alle condizioni (6); per cui si avrà in particolare:

$$\int_a^b g(s) \cdot \theta(s) ds = 0;$$

e poichè:

$$\int_a^b \theta(s) ds \int_a^b K(s, t) h(t) dt = \int_a^b h(t) dt \int_a^b K(s, t) \cdot \theta(s) ds = 0,$$

risulterà:

$$\int_a^b \{ \theta(s) \}^2 ds = \int_a^b \theta(s) \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt \right\} ds = 0;$$

e quindi anche nel caso in cui il nucleo non è chiuso dovrà valere la (10).

**Matematica. — *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo.* Nota del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.**

Lo studio esauriente delle superficie algebriche irregolari di genere geometrico zero, fu già fatto da Enriques fin dal 1905<sup>(1)</sup> partendo dal legame, allora da poco scoperto<sup>(2)</sup>, tra l'irregolarità di una superficie ed il numero de' suoi integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie. La proprietà fondamentale da cui occorre muovere per quello studio, è data dall'esistenza di un fascio irrazionale di curve, sopra una superficie irregolare  $F$  di genere zero<sup>(3)</sup>.

In questa Nota mi propongo di pervenire a tale proprietà per una via geometrica, che è applicabile anche alle varietà superiori (nn. 6, 7, 8), mentre il procedimento finora seguito per le superficie, non sembra facilmente estendibile. La dimostrazione cui alludo, oltre ad esser concettualmente assai semplice, parmi anche più appropriata alla natura del risultato da stabilirsi.

Posso qui riassumerne in brevi parole il concetto informativo.

Sulla superficie  $F$  di genere  $p_g = 0$  e d'irregolarità  $q \geq 1$ , si assuma un sistema algebrico  $\Sigma \infty^1$ , di curve  $C$  non equivalenti tra loro:  $r$  sia l'indice del sistema, e  $D$  la curva composta colle  $r$  curve  $C$  uscenti da un punto  $x$  di  $F$ . Le  $\infty^2$  curve  $D$ , che si ottengono al variare di  $x$ , non possono essere a due a due equivalenti, perchè lo sarebbero le  $C$ . Restano quindi, a priori, possibili due ipotesi:

- 1) Le  $D$  si distribuiscono in gruppi di un numero finito  $n (\geq 1)$  di curve equivalenti.
- 2) Esse distribuiscono invece in una semplice infinità di sistemi  $\infty^1$ , ciascuno dei quali è costituito da curve  $D$  equivalenti.

Orbene, si dimostra che l'ipotesi 1) è da scartarsi.

Ciò è evidente senz'altro, quando  $q = 1$ , perchè i sistemi lineari  $|D|$ , che appartengono ad un medesimo sistema continuo, non possono essere più che  $\infty^q$  tra loro distinti. Nel caso  $q > 1$ , se fosse possibile l'ipotesi 1), la superficie  $F$  o più generalmente una sua involuzione  $I_n$  — i cui gruppi sarebbero dati dai punti  $x$  di un medesimo sistema di curve  $D$  equivalenti —

(<sup>1</sup>) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XX, 1905).

(<sup>2</sup>) Le citazioni relative si trovano ad es. nell'articolo di Castelnuovo-Enriques alla fine del t. II della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard et Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1906), pag. 494.

(<sup>3</sup>) L'esistenza di un tal fascio era già stata dimostrata da Castelnuovo, sotto l'ipotesi, rivelatasi poi superflua, che  $F$  possedesse integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie.

risulterebbe birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi  $V_p$ , rappresentante i gruppi di  $p$  elementi dell'ente  $\infty^1 \Sigma$ , di genere  $p$ ; mentre invece sulla  $V_p$  non possono esistere superficie di genere zero.

In ogni caso resta dunque possibile soltanto l'ipotesi 2). I punti del sistema  $H$  formato da  $\infty^1$  curve  $D$  equivalenti, riempiono una curva algebrica  $M$ , la quale, variando  $H$ , descrive sulla  $F$  il fascio irrazionale di cui volevasi provare l'esistenza.

1. *Esistenza d'un fascio irrazionale sulle superficie d'irregolarità  $q = 1$ .* Consideriamo anzitutto una superficie  $F$  d'irregolarità 1 (e di genere geometrico qualunque). Si dimostra assai facilmente che la  $F$  contiene un fascio ellittico di curve.

Si assuma infatti su  $F$  un sistema algebrico  $\infty^1 \Sigma$  di curve  $C$  non equivalenti tra loro: ciò è sempre possibile appunto perchè  $F$  è irregolare <sup>(1)</sup>. I gruppi di  $r$  curve  $C$  uscenti dai punti della superficie, danno luogo ad un sistema  $\Sigma'$  di  $\infty^2$  curve  $D$ , le quali non possono essere tutte equivalenti tra loro, perchè lo sarebbero anche le  $C$  <sup>(2)</sup>. Nè può darsi che in  $\Sigma'$  vi sia soltanto un numero finito (zero incluso) di curve equivalenti ad una generica  $D$ , perchè si otterrebbe in tal caso su  $F$  un sistema continuo formato da  $\infty^2$  sistemi lineari distinti. Ne deriva che, data una generica  $D$ , vi sono in  $\Sigma' \infty^1$ , e soltanto  $\infty^1$ , curve a quelle equivalenti.

I punti di  $F$  da cui escono i gruppi di curve  $C$  formanti queste  $\infty^1$  curve  $D$  equivalenti, riempiono una curva  $M$ , la quale, variando la generica  $D$ , da cui siamo partiti, varia su  $F$  descrivendo un fascio, giacchè è ben chiaro che per ogni punto di  $F$  non può passare che una  $M$ .

Poichè la serie algebrica segata sopra una data  $M$  dalle  $\infty^1$  curve  $D$  ad essa relative, è formata da gruppi equivalenti, lo stesso accadrà della serie segata su quella  $M$  dalle  $C$  <sup>(3)</sup>. Se pertanto il fascio delle  $M$  fosse lineare, dal momento che le  $C$  segnano sulle sue curve gruppi equivalenti, ne seguirebbe l'equivalenza di tutte le  $C$  <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1904). Vedi pure Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1905).

<sup>(2)</sup> Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 1905), n. 9. Il teorema I di questa Memoria, sopra cui si fonda la proposizione applicata nel testo, fu poi dimostrato geometricamente da Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

<sup>(3)</sup> Severi, *Il teorema d'Abel, ecc. teorema I*; Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

<sup>(4)</sup> Severi, *Il teorema d'Abel, ecc. n. 6*. Il criterio d'equivalenza applicato è ivi dimostrato per via geometrica.

Dunque il fascio delle  $M$  è di genere  $> 0$  e quindi, dato il valore dell'irregolarità di  $F$ , di genere 1 <sup>(1)</sup>.

2. *Esistenza d'un fascio irrazionale sopra le superficie di genere geometrico zero e d'irregolarità  $q > 1$ .* Abbiasi ora una superficie  $F$  di genere  $p_g = 0$  e d'irregolarità  $q > 1$ . Assumasi ancora su di essa un sistema  $\Sigma$  <sup>1</sup>, d'indice  $\nu > 1$ , di curve  $C$  non equivalenti. Si può sempre supporre che il genere  $p$  di  $\Sigma$ , come ente  $\infty^1$  sia  $> 1$ . Ciò equivale ad affermare che sulla varietà  $V_q$  di Picard inerente ad  $F$  — varietà i cui punti rappresentano gli  $\infty^q$  sistemi lineari contenuti in un generico sistema continuo completo di curve tracciate su  $F$  — si possono costruire curve di genere  $> 1$ . Per convincersene basta p. e. considerare le curve caratteristiche del sistema lineare formato dalle sezioni iperpiane di  $V_q$  o di un multiplo abbastanza elevato di questo sistema (curve comuni a  $q - 1$  varietà del sistema). Aggiungeremo inoltre l'ipotesi, non restrittiva, che il sistema  $\Sigma$  non sia composto con un'involuzione.

Ciò posto, si considerino le  $\infty^2$  curve  $D$  formate coi gruppi di  $\nu$  curve  $C$  uscenti dai punti di  $F$ . Per brevità, nel seguito, un punto di  $F$  lo chiameremo « il punto  $\nu$ -plo » della  $D$  composta colle  $\nu$  curve  $C$  che escono da quello. Dimostreremo che, entro all'ente  $\Sigma$ , le serie lineari individuate dai gruppi  $D$ , non possono essere  $\infty^2$  tra loro distinte.

Potremo allora concludere che ogni gruppo  $D$ , entro all'ente  $\Sigma$ , ne ha  $\infty^1$ , e soltanto  $\infty^1$ , equivalenti, perchè se i gruppi  $D$ , entro  $\Sigma$ , fossero tutti equivalenti tra loro lo stesso accadrebbe delle curve  $C$  su  $F$  <sup>(2)</sup>.

3. Se le serie lineari individuate entro  $\Sigma$  dai gruppi  $D$ , sono  $\infty^2$ , distinte tra loro, vuol dire che ogni gruppo  $D$  è equivalente ad  $n - 1$  ( $\geq 0$ ) gruppi analoghi, e su  $F$  si ha un'involuzione d'ordine  $n$  ( $\geq 1$ ) i cui gruppi sono formati dai punti  $\nu$ -pli di quelle  $n$  curve  $D$ .

Ma, anche qualora fosse  $n > 1$ , ogni superficie  $\Phi$  che rappresentasse birazionalmente l'involuzione suddetta, avrebbe evidentemente il genere geometrico nullo <sup>(3)</sup>. Or io dico che la totalità delle  $\infty^2$  serie lineari d'ordine  $\nu$ , individuate in  $\Sigma$  dalle  $D$ , si può riferire birazionalmente ad una varietà  $\infty^2$  di gruppi di  $p$  elementi dell'ente  $\Sigma$ , talchè ne seguirà che  $\Phi$  è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi  $V_p$ , imagine dei gruppi di  $p$  elementi dell'ente  $\Sigma$ , o meglio delle  $\infty^p$  serie lineari distinte, individuate da questi gruppi <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1904). Vedi alla fine del n. 6.

<sup>(2)</sup> Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. n. 9, teorema b). Questo teorema è dimostrato geometricamente.

<sup>(3)</sup> Basta ricordare come si trasformano per una corrispondenza  $(l, n)$  le curve canoniche d'una superficie (Enriques-Severi).

<sup>(4)</sup> Lo studio geometrico d'una tal varietà trovasi in Castelnuovo (Rendiconti del

Introduciamo per brevità una curva  $S$ , i cui punti rappresentino le curve di  $\Sigma$ , e indichiamo con  $G$  il gruppo di  $v$  punti rappresentante una  $D$  fissata genericamente, con  $G'$  il gruppo omologo d'una  $D$  variabile, e infine con  $H$  un gruppo non speciale di  $p$  punti della  $S$ . Poichè la serie lineare  $|G + H|$ , d'ordine  $v + p$ , è non speciale, esisterà, per ogni posizione di  $G'$ , la serie  $|G + H - G'|$  e si ridurrà generalmente ad un gruppo *non speciale*  $H'$  di  $p$  punti, perchè questa circostanza si verifica in particolare quando  $G'$  coincide con  $G$ . La varietà delle serie  $|G'|$  vien così riferita birazionalmente alla varietà dei gruppi  $H'$  o meglio delle serie  $H'$ .

4. Resta quindi stabilito che la superficie  $\Phi$ , di genere geometrico nullo, è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi  $V_p$ , priva di varietà eccezionali. Trasformando  $\Phi$  mediante il gruppo continuo  $\infty^p$  delle trasformazioni birazionali di 2<sup>a</sup> specie, che appartengono a  $V_p$  (¹), data la transitività del gruppo, il sistema algebrico  $T$  costituito dalle trasformate di  $\Phi$ , invaderà tutta la  $V_p$ , e sarà quindi almeno di dimensione  $p - 2$ .

Ma ciò è assurdo, perchè la  $V_p$  risulterebbe allora di genere geometrico nullo (²), mentre invece il suo genere geometrico vale 1 (n. 5).

Si conclude pertanto che, dato un gruppo  $D$ , entro all'ente  $\Sigma$ , ve ne sono  $\infty^1$  altri, e soltanto  $\infty^1$ , ad esso equivalenti. I punti  $v$ -pli delle relative curve  $D$  riempiono una curva algebrica  $M$  e, al variare della  $D$  considerata,  $M$  descrive un fascio  $\Gamma$  (per *ogni* punto di  $F$  passa una sola  $M$ ).

Poichè la corrispondenza tra una  $M$  e l'ente  $\Sigma$ , ove si chiamino omologhi un punto di  $M$  e una curva  $C$  quando si appartengano, è a valenza zero nel passaggio da  $M$  a  $\Sigma$ , sarà a valenza zero anche nel senso inverso (³), il che significa che le  $C$  segano sopra ogni  $M$  gruppi equivalenti.

Consideriamo ora il sistema continuo completo  $\{C\}$  — costituito da  $\infty^2$  sistemi lineari distinti — cui appartiene  $\Sigma$ . Poichè  $\Sigma$  si può, senza restrizione, supporre variabile entro  $\{C\}$  in tal guisa che risultino assegnabili ad arbitrio in  $\{C\}$  due delle curve di  $\Sigma$ , e poichè d'altronde, variando  $\Sigma$ , il fascio  $\Gamma$ , che è già un sistema completo (di grado zero), non può variare, ne consegue che due *qualunque*  $C$  segano sopra ogni  $M$  gruppi equivalenti, talchè, se esse non sono equivalenti, differiscono per curve del fascio (⁴).

Trattandosi di curve dello stesso ordine, una di quelle  $C$  si otterrà dunque dall'altra aggiungendo e togliendo due gruppi di un egual numero di curve di  $\Gamma$ . Il sistema  $\{C\}$  conterrà pertanto altrettanti sistemi lineari distinti,

R. Istituto lombardo, 1892). Prendendo come elementi di  $V_p$  le serie lineari  $g_p$  dell'ente  $\Sigma$ , si ottiene una  $V_p$  priva di varietà eccezionali.

(¹) Vedi Castelnuovo, loc. cit.

(²) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie* (Atti del R. Istituto veneto, 1911), n. 7, oss. 4<sup>a</sup>.

(³) Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. teorema II.

(⁴) Ibidem, n. 6.

quante serie lineari di dato ordine ( $\geq p$ ) son contenute in  $\Gamma$ , e quindi sarà  $p = q$ . Concludendo:

*Ogni superficie di genere geometrico nullo e d'irregolarità  $q \geq 1$ , contiene un fascio irrazionale di genere  $q$ , di curve algebriche* <sup>(1)</sup>.

5. *Digressione sul genere geometrico della varietà di Jacobi.* — Nel n. precedente abbiamo dovuto far uso del fatto che una varietà di Jacobi ha il genere 1. Questa proprietà si stabilisce agevolmente per via trascendente <sup>(2)</sup>; ma, dato che qui si tratta di esporre una dimostrazione geometrica dell'esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie irregolare di genere zero, occorrerà che cerchiamo di giungere alla proprietà invocata in modo conforme al nostro scopo.

Dimostreremo che sulla  $V_q$  delle  $q$ -ple di punti di una curva  $C$  di genere  $p$  ( $q \leq p$ ), la varietà  $M_{q-1}$  delle  $q$ -ple tolte dai singoli gruppi di una  $g_{2p-2}^{q-1}$  canonica, è una varietà canonica <sup>(3)</sup>.

Poichè il teorema è vero per  $q = 1$ , lo supporremo dimostrato per le varietà dei gruppi di  $q - 1$  punti e lo stabiliremo per le varietà  $V_q$ .

La  $V_q$  contiene  $\infty^1$  varietà  $W_{q-1}$ , irriducibili e birazionalmente identiche, ognuna delle quali rappresenta le  $q$ -ple con un punto fisso. Cerchiamo di caratterizzare l'intersezione di una  $W_{q-1}$  relativa al punto  $P$ , colla  $M_{q-1}$  di cui si parla nell'enunciato.

Nella corrispondenza tra le  $(q - 1)$ -ple di  $C$  e i punti di  $W$ , alle  $(q - 1)$ -ple tratte dalla  $g_{2p-3}^{q-2}$  residua del punto  $P$  rispetto alla fissata  $g_{2p-2}^{q-1}$ , risponde una varietà, la quale, addizionata a quella che rappresenta le  $(q - 1)$ -ple aventi il punto fisso  $P$ , pel teorema ammesso, dà una varietà canonica di  $W$ . E invero, quando una  $g_{2p-3}^{q-2}$  si muove tendendo alla serie  $g_{2p-3}^{q-2} + P$ , la varietà delle  $(q - 1)$ -ple tratte dalla prima serie, tende alla varietà delle  $(q - 1)$ -ple che impongono  $q - 2$  condizioni ai gruppi della serie limite, la qual varietà è appunto costituita dalle  $(q - 1)$ -ple tolte dalla  $g_{2p-3}^{q-2}$  e da quelle che hanno il punto fisso  $P$ .

E poichè queste ultime sono rappresentate dai punti comuni alla  $W_{q-1}$  fissata e alla sua varietà infinitamente vicina, la  $M_{q-1}$  viene a segare su  $W_{q-1}$  una varietà residua della varietà caratteristica rispetto al sistema canonico. Ne segue che  $M_{q-1}$  è una varietà canonica di  $V_q$  <sup>(4)</sup>.

In particolare per  $p = q$  si ha come varietà canonica la  $M_{p-1}$  delle  $p$ -ple speciali, la quale si riduce addirittura ad un punto (semplice) di  $V_p$ ,

(<sup>1</sup>) Che poi queste curve sieno *razionali* quando  $q > 1$ , è dimostrato per via geometrica in Enriques (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. III, pag. 88).

(<sup>2</sup>) Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1903) n. 9.

(<sup>3</sup>) *Ibidem*, n. 10.

(<sup>4</sup>) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc. n. 7.

se, invece di assumere i punti della varietà di Jacobi come immagini delle  $p$ -ple, si assumono come immagini delle serie lineari d'ordine  $p$  appartenenti a  $C$ .

Sicchè, insomma, sulla  $V_p$  priva di varietà eccezionali, il sistema canonico è d'ordine zero, e quindi il genere geometrico di  $V_p$  è uguale ad 1.

6. *Estensione delle cose precedenti alle varietà. Esame delle  $V_k$  che hanno l'irregolarità superficiale  $q < k$ .* — Si assuma sopra la  $V_k$  d'irregolarità superficiale  $q$  <sup>(1)</sup> minore della dimensione  $k$ , un sistema  $\Sigma \infty^1$  di varietà  $V_{k-1}$  non equivalenti. Gli  $\infty^k$  gruppi di  $r$  varietà  $V_{k-1}$  uscenti dai punti di  $V_k$ , danno luogo a varietà riducibili  $W$ , non equivalenti tra loro, perchè altrimenti sarebbero equivalenti i gruppi segati da  $W$  sopra una curva qualunque di  $V_k$  e quindi anche i gruppi segati sulla stessa curva dalle  $V_{k-1}$  <sup>(2)</sup>, il che porterebbe all'equivalenza di queste ultime varietà <sup>(3)</sup>. Ne deriva che, data una  $W$ , ve ne sono  $\infty^i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) equivalenti a quella.

Il luogo dei punti  $r$ -pli di queste  $W$  equivalenti, è una  $M_i$  algebrica, la quale, al variare di  $W$ , descrive entro  $V_k$  un sistema  $\Gamma$ ,  $\infty^{k-i}$ , d'indice 1.

Sopra ogni  $M_i$  le  $V_{k-1}$  staccano delle  $N_{i-1}$  equivalenti tra loro, perchè la varietà formata dalle  $r N_{i-1}$  che escono da un punto variabile di  $M_i$ , si muove in un sistema lineare.

Ciò può anche esprimersi dicendo che le  $V_{k-1}$  segano sopra una curva qualunque  $C$  di genere  $\pi$ , tracciata su  $M_i$ , una serie  $\gamma_n^1$  con  $2r(n + \pi - 1)$  punti doppi <sup>(4)</sup>.

Se ora si suppone che  $\Sigma$  possa variare in modo continuo in un sistema completo  $\{V_{k-1}\}$ , costituito da  $\infty^q$  sistemi lineari, per ogni posizione di  $\Sigma$  i caratteri numerativi della serie segata su  $C$  si mantengono inalterati, onde le varietà di  $\Sigma$  staccheranno sempre su  $C$  e quindi <sup>(5)</sup> anche sopra  $M_i$ , varietà equivalenti. Poichè nulla ci vieta di supporre che l'ente  $\Sigma$  sia variabile entro  $\{V_{k-1}\}$  in un sistema algebrico tale che due varietà qualunque del sistema continuo completo determinino una (o più) posizioni di  $\Sigma$ , così si conclude che le  $V_{k-1}$  del dato sistema continuo, staccano varietà equivalenti sopra ogni  $M_i$ .

(1) Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales de l'École normale supérieure de Paris, 1905). Vedi pure la mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909), n. 14.

(2) Scveri, *Il teorema d'Abel*, ecc.; Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

(3) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc.; n. 6.

(4) Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Questi Rendiconti, 1906).

(5) Severi, loc. ultimamente citato.

Tutte le  $V_{k-1}$  si otterranno dunque da una di esse aggiungendo e togliendo due varietà di dimensione  $k-1$ , appartenenti ad un sistema continuo  $H$ , composto mediante le  $M_i$ . Indicando con  $\gamma$  una varietà a  $k-i$  dimensioni, i cui punti sieno le immagini delle  $M_i$  di  $\Gamma$ , le varietà di  $H$  corrisponderanno a varietà di dimensione  $k-i-1$ , costituenti un sistema continuo  $h$  di  $\gamma$ . Sicchè, tanti saranno i sistemi lineari distinti di  $\{V_{k-1}\}$ , quanti i sistemi lineari distinti contenuti nel sistema, eventualmente completato,  $h$ .

Insomma la varietà  $V_k$  e il sistema  $\Gamma$  avranno la stessa irregolarità bidimensionale  $q$  (si dovrà dire che  $q$  è uguale al genere della curva  $\gamma$ , se  $i = k-1$ ).

Si conclude che:

*Ogni varietà algebrica  $V_k$  d'irregolarità superficiale  $q < k$ , contiene un sistema  $\infty^{k-i}$  d'indice 1, di varietà  $M_i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), avente anche esso l'irregolarità bidimensionale  $q$ .*

Si aggiunga che i valori di  $i$ , da 1 a  $k-1$ , sono tutti quanti possibili (non beninteso sopra la stessa varietà): basta ad es. considerare la varietà  $V_k$  delle coppie di punti di una  $V_{k-i}$  d'irregolarità superficiale  $q$  e di uno spazio lineare  $S_i$ .

7. *Varietà  $V_k$  di genere zero e d'irregolarità superficiale  $q \geq k$ .* — Scelto su  $V_k$  un sistema  $\Sigma \infty^1$  di varietà  $V_{k-1}$ , e considerate le varietà  $W$  composte colle  $\nu V_{k-1}$  che escono dai punti di  $V_k$ , si prova, come nel n. precedente, che entro  $V_k$  esiste un sistema  $\Gamma \infty^{k-i}$ , d'indice 1 e d'irregolarità bidimensionale  $q$ , di varietà  $M_i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) su cui le  $V_{k-1}$  del sistema continuo completo cui appartiene  $\Sigma$ , staccano varietà equivalenti. Tutto ciò però a condizione che si sia già dimostrato che gli  $\infty^k$  sistemi lineari  $|W|$  non possono essere tra loro distinti.

Ora questo fatto si stabilisce con un'ovvia estensione del ragionamento esposto, nel caso delle superficie, nei nn. 3, 4. Se cioè i sistemi  $|W|$  fossero  $\infty^k$ , la varietà  $V_k$  o una sua involuzione — che sarebbe ancora di genere zero — si potrebbe trasformare birazionalmente in una varietà appartenente alla  $V_p$  di Jacobi, che corrisponde all'ente  $\Sigma$ , il quale può sempre supporsi di genere  $p \geq k$ ; mentre invece sulla  $V_p$ , che è di genere 1, non possono esistere varietà di genere zero.

Si può dunque enunciare che:

*Ogni varietà  $V_k$  di genere geometrico nullo e d'irregolarità superficiale  $q$ , contiene un sistema d'indice 1 di varietà  $M_i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale  $q$ .*

**OSSERVAZIONE.** S'avvertirà che è sempre lecito supporre  $q \geq k-i$ . Sia infatti  $q < k-i$  e indichiamo con  $V_{k-i}$  una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le  $M_i$  del sistema  $\Gamma$ . Pel teorema del n. 6, sulla  $V_{k-i}$  esisterà un sistema  $\Gamma', \infty^{k-i-i'}$ , d'indice 1 e d'irregolarità  $q$ , costituito

da varietà  $M_{i'}$ , e nella corrispondenza tra  $V_{k-i}$  e  $V_k$ , al sistema  $\Gamma'$  risponderà un sistema  $\Gamma_0, \infty^{k-i-i'}$ , d'indice 1 e d'irregolarità  $q$ , costituito da varietà  $M_{i+i'}$  composte col sistema  $\Gamma$ . Se non è ancora  $q \geq k - i - i'$ , si potrà similmente proseguire, finché non si pervenga ad un sistema d'indice 1 e di dimensione non superiore a  $q$ .

8. *Proprietà degl'integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie appartenenti ad una  $V_k$  di genere zero.* — La nota dimostrazione dell'esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie  $F$  di genere zero, fa capo in sostanza all'identità di Noether, che lega ogni coppia d'integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie ad un integrale doppio di 1<sup>a</sup> specie, sopra una qualunque superficie <sup>(1)</sup>.

Non sembra facile estendere alle varietà la relazione di Noether, tanto più perchè, a quanto pare, non una, ma  $k - 1$  identità debbono ottenersi sopra una  $V_k$ , in corrispondenza ad altrettanti legami fra gl'integrali semplici e gl'integrali doppi, tripli, ...,  $k$ -pli di 1<sup>a</sup> specie.

Comunque, il risultato del n. precedente ci dà modo di stabilir subito l'estensione di quel fatto che sulle superficie di genere zero consegue dalla identità di Noether, e cioè:

*Data una  $V_k$  di genere zero e d'irregolarità superficiale  $q > 0$ , esiste un intero  $i$  ( $1 \leq i \leq k - 1$ ), tale che  $k - i + 1$  integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie di  $V_k$  son sempre funzionalmente dipendenti, mentre non lo sono in generale un numero inferiore di essi.*

Sia infatti  $\Gamma$  il sistema  $\infty^l$  ( $l = k - i$ ), d'irregolarità bidimensionale  $q$ , costituito da varietà  $M_i$  appartenenti a  $V_k$ . Per l'osservazione con cui si chiude il n. precedente, si potrà sempre supporre che sia  $q \geq l$ .

Fissiamo il modello proiettivo di  $V_k$  nello spazio  $S_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ , in tal guisa che  $V_k$  sarà un'ipersuperficie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = 0$$

di questo spazio; e sia inoltre

$$g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i+1}) = 0$$

l'equazione di una  $V_i$  — dello  $S_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i+1})$  — i cui punti rappresentino birazionalmente le  $M_i$  di  $\Gamma$ . Essendo  $\Gamma$  d'indice 1, le  $\xi$  risulteranno funzioni razionali del punto  $x$  variabile su  $V_k$ , e gl'integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie di  $V_k$ , dal momento che  $V_k$  e  $V_i$  hanno la stessa irregolarità superficiale  $q$ , proverranno tutti dagli integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie di  $V_i$ , mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), \dots, \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}).$$

<sup>(1)</sup> Vedi l'osservazione di Castelnuovo alla fine di una Memoria di Enriques pubblicata negli Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2<sup>e</sup> série, t. III.

Presi pertanto  $l+1$  integrali linearmente indipendenti di  $V_l$  (con che si viene implicitamente a supporre che sia  $q > l$ ):

$$\int A_{1s} d\xi_1 + A_{2s} d\xi_2 + \cdots + A_{ls} d\xi_l \quad (s = 1, 2, \dots, l+1),$$

la matrice jacobiana dei corrispondenti integrali di  $V_k$ , considerati come funzioni delle variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_k$ , sarà

$$\left\| \sum_{r=1}^l A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1}, \sum_{r=1}^l A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2}, \dots, \sum_{r=1}^l A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_k} \right\|^{(1)} \quad (s = 1, 2, \dots, l+1),$$

ove, beninteso, le derivate si calcolino tenendo conto che  $x_{k+1}$  è funzione algebrica di  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Consideriamo un determinante d'ordine  $l+1$  estratto da questa matrice, p. es.:

$$\left| \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1}, \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2}, \dots, \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_{i+1}} \right| \quad (s = 1, \dots, l+1).$$

Esso uguaglia il prodotto delle due matrici:

$$\left\| A_{1s}, A_{2s}, \dots, A_{ls} \right\|, \left\| \frac{d\xi_1}{dx_s}, \frac{d\xi_2}{dx_s}, \dots, \frac{d\xi_l}{dx_s} \right\| \quad (s = 1, \dots, l+1);$$

e poichè in queste il numero delle orizzontali supera il numero delle verticali, il determinante prodotto risulterà identicamente nullo. Ciò vale per ogni determinante di ordine massimo estratto dalla matrice funzionale di  $l+1$  integrali qualunque di  $V_k$ ; dunque gl'integrali stessi son funzionalmente dipendenti.

Ci resta da considerare l'ipotesi  $q = l$ . Se la varietà  $V_l$  non ha i suoi integrali di 1<sup>a</sup> specie funzionalmente distinti, si conclude facilmente, come sopra, che  $l+1 < l+1$  integrali di 1<sup>a</sup> specie di  $V_k$  son sempre funzionalmente dipendenti.

Altrimenti, assunto sopra  $V_l$  un sistema  $\infty^1 \Sigma'$  di varietà  $V_{l-1}$  non equivalenti, e considerato l'insieme  $\infty^l$  delle varietà  $W'$  composte colle  $\nu' V_{l-1}$  che escono dai singoli punti di  $V_l$ , si vede che i sistemi lineari  $|W'|$  debbon essere  $\infty^l$ , tra loro distinti, perchè altrimenti (n. 6)  $V_l$  conterrebbe un sistema  $\Gamma' \infty^{l-\nu'}$  d'indice 1 e d'irregolarità  $l$ , di varietà  $M_{\nu'}$ , e gl'integrali semplici di  $V_l$  non sarebbero più funzionalmente distinti.

Ma dunque i sistemi  $|W'|$  si distribuiscono in  $\infty^l$  gruppi, ognuno dei quali è formato da  $n (\geq 1)$  sistemi  $|W'|$  equivalenti, sicchè gli  $n$  punti  $\nu'$ -pli di  $n$  varietà  $W'$  tra loro equivalenti, formano un gruppo variabile in una involuzione  $I_n$ , birazionalmente identica alla varietà di Picard annessa a

(1) Indichiamo la matrice scrivendo soltanto la sua orizzontale  $s$ -esima.

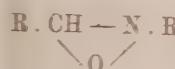
$V_i$  (1). Poiché dalla varietà di Picard relativa a  $V_i$  è ciò che è lo stesso, a  $V_k$ , si passa a  $V_i$  con una trasformazione razionale, e da  $V_i$  si risale a  $V_k$  con un'altra sostituzione razionale, così si conclude che:

*Il teorema precedente vale in difetto allora e solo allora che, essendo  $i < k$ ,  $V_i$  è una trasformata razionale della propria varietà di Picard.*

Questo caso d'eccezione può presentarsi effettivamente: basta p. es. considerare la varietà  $V_k$  delle coppie di punti di una varietà di Picard, semplice o multipla,  $V_l$ , e di uno spazio lineare  $S_{k-l}$ .

**Chimica. — Ricerche sopra gli eteri *N*-fenilici delle ossime** (2). Nota del Corrispondente A. ANGELI, L. ALESSANDRI e M. AIAZZI-MANCINI.

Gli eteri *N*-alchilici delle ossime, come è noto, vengono per lo più preparati facendo agire, nelle opportune condizioni, gli ioduri alcolici sulle ossime, ovvero per condensazione delle aldeidi con le idrossilammine sostituite; generalmente si attribuisce loro la forma:



la quale venne stabilita strettamente in analogia al processo di condensazione che si compie fra i nitrosoderivati e le idrossilammine (3), e non già in base alle trasformazioni che queste sostanze possono subire.

Come venne posto in rilievo due anni or sono (4), questa formula, che ricorderebbe quella degli ossidi



(che sono stabili al permanganato, al pari delle basi di Schiff), non spiega la instabilità di queste sostanze rispetto al permanganato (Reazione di Baeyer), e non è in accordo col fatto che in tutte le trasformazioni più blande e più nette che possono subire questi eteri, mai si è verificato che l'azione di ossigeno comparisca unico al carbonio, ma sempre all'azoto; in realtà si dovrebbe attendere precisamente il contrario.

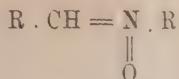
(1) Castelnuovo, *Suppli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Questi Rendiconti, 1905), n. 4.

(2) Lavori eseguiti nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica del R. Istituto di Studi Superiori di Firenze.

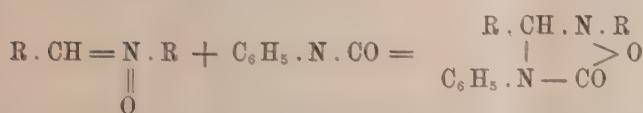
(3) *Berliner Berichte*, XXVII, 1556.

(4) Questi Rendiconti (1909), 2<sup>a</sup> sem., pag. 40.

Per queste ragioni, a noi sembra che sia preferibile lo schema:



il quale giustifica meglio le reazioni principali che presentano questa interessante classe di sostanze:



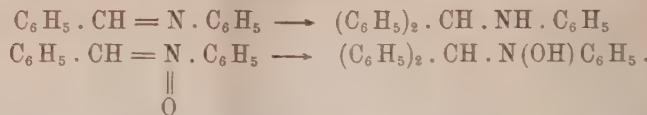
Anche i tentativi infruttuosi eseguiti recentemente da I. Scheiber <sup>(1)</sup> e diretti a scindere questi eteri in forme attive, che sarebbero dovute alla assimetria dell'atomo di carbonio unito all'azoto ed all'ossigeno, parlano in favore della nostra ipotesi.

Se le nostre vedute erano giuste, era da aspettarsi che questi N-eteri anche in altre reazioni dovevano comportarsi in modo analogo alle basi di Schiff; e noi abbiamo iniziato le nostre ricerche studiando il contegno di queste sostanze rispetto al reattivo di Barbier-Grignard, in modo analogo a quanto il Busch <sup>(2)</sup> aveva fatto per i prodotti di condensazione delle aldeidi con le ammine.

<sup>(1)</sup> Berliner Berichte, XXXXIV, 761.

<sup>(2)</sup> Berliner Berichte, XXXVII, 2691 e seguenti.

Le nostre esperienze ci hanno subito dimostrato che le due reazioni procedono nello stesso modo: infatti, impiegando bromuro di fenilmagnesio:



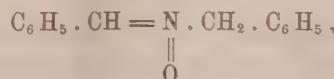
La sola differenza risiede nel fatto che, in seguito all'addizione di un atomo di idrogeno all'azoto, l'ossigeno assume la forma ossidrilica.

Durante l'azione del bromuro di fenilmagnesio, insieme con l'idrossilamina accennata si forma anche un prodotto che fonde a 214°, e che contiene due atomi di idrogeno in meno: come le nostre esperienze hanno dimostrato, la sua formazione è dovuta ad una ossidazione determinata dalla presenza del reattivo di Barbier-Grignard. Infatti lo stesso prodotto, del quale, per la sua piccola solubilità nella maggior parte dei solventi, ancora non ci fu possibile determinare la grandezza molecolare, si forma anche dalla medesima idrossilamina per azione dell'ossido mercurico, ovvero per azione dell'aldeide benzoica, in presenza d'aria. Ciò evidentemente è dovuto ad un processo di autossidazione, e senza dubbio il reattivo di Barbier-Grignard, per azione dell'ossigeno, fornisce un perossido, in modo analogo a quanto V. Meyer e Demuth (¹) hanno trovato per il caso dello zincoetile.

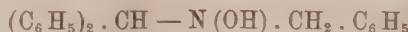
Anche il prodotto che fonde a 214 per ossidazione fornisce nettamente benzofenone e nitrosobenzolo; ridotto con mezzi appropriati, dà la base già descritta da Busch (²):



In modo perfettamente analogo partendo dall'etere



si perviene all'idrossilamina:



la quale si comporta come quella precedentemente descritta.

Continueremo lo studio di queste sostanze.

(¹) Berliner Berichte, XXIII, 394. Che il reattivo di Barbier-Grignard possa all'aria dar origine a perossidi, venne osservato da Wuyts, il quale ha dimostrato che mette in libertà iodio da ioduro di potassio, e che rende azzurri l'idrochinone e la difenilammina (Compt. Rend. de l'Accad. des sciences, 148, 930).

(²) Berliner Berichte, XXXVII, 2691 e seguenti.

## PARTE Sperimentale.

*Azione dell'ioduro di etil-magnesio sull'etere N-fenilico della benzaldossima.* — Ad una molecola del prodotto N-fenil-benzaldossima, ben secco e finamente polverizzato, sospeso in molto etere, si aggiunge, raffreddando con ghiaccio, una quantità equimolecolare di ioduro di magnesio-etile sciolto in etere, ed infine si fa bollire per un'ora circa. Dopo raffreddamento si aggiungono alla soluzione eterea dei pezzetti di ghiaccio e, precipitata completamente la magnesia, dell'acido solforico diluito fino a reazione nettamente acida al metilorange. Separato l'etere, per evaporazione rimane un olio giallo, che presto si rapprende in cristalli: questi, purificati dall'alcool, si presentano come prismetti incolori, splendenti, che fondono a 127° e per azione della luce si colorano in giallo: sono molto solubili in etere anche a freddo, poco in alcool.

I. gr. 0,2394 di sostanza diedero gr. 0,6939 di  $\text{CO}_2$  e gr. 0,1635 di  $\text{H}_2\text{O}$ .  
 II. gr. 0,2598 di sostanza diedero cc. 13,5 di azoto a 14° e 763 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per $\text{C}_{15}\text{H}_{17}\text{NO}$
	I	II	
C	79,05	—	79,29
H	7,59	—	7,49
N	—	6,20	6,16

Trattata con soluzione di permanganato potassico a caldo, dà nitroso-benzolo: con altri mezzi ossidanti, come l'acqua ossigenata e l'ossido di mercurio, ottenemmo solamente, insieme con sostanza inalterata, un olio giallo che non ha cristallizzato.

*Azione del bromuro di magnesio-fenile sul medesimo etere N-fenilico della benzaldossima.* — Su di una molecola del composto abbiamo fatto reagire una molecola ed un quarto di bromuro di magnesio-fenile, operando del resto in modo perfettamente analogo a quello già descritto. La sostanza, che si ottiene dalla soluzione eterea decantata da un piccolo residuo che rimane indisciolto, purificata dall'alcool, è molto simile nell'aspetto a quella ottenuta con ioduro di magnesio-etile: fonde a 127°: è pure molto solubile in etere, poco in alcool a freddo: ingiallisce assai più lentamente per azione della luce.

I. gr. 0,1864 di sostanza diedero gr. 0,5653 di  $\text{CO}_2$  e gr. 0,1053 di  $\text{H}_2\text{O}$ .  
 II. gr. 0,3055 di sostanza diedero cc. 13,4 di azoto a 13° e 768 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
	I	II	
C	82,71	—	82,91
H	6,27	—	6,18
N	—	5,29	5,09

Dalla soluzione eterea del composto lasciandola a sè, e dall'alcool che ha servito a cristallizzarlo concentrando fortemente, si hanno pagliette giallo-chiare, rifrangenti, che, purificate dallo stesso solvente, fondono in un liquido bruno a 214°. Questo prodotto che si forma in piccola quantità, è quasi insolubile in etere: poco solubile anche all'ebullizione in alcool e in benzolo. Nelle ultime preparazioni avemmo cura di raffreddare bene con ghiaccio il liquido etereo prima di separarlo dalla parte rimasta indisciolta; ed in questa, dopo il solito trattamento con ghiaccio e successivamente con acido solforico diluito, insieme con poca sostanza di partenza inalterata, si trova una discreta quantità del composto giallo che fonde a 214°, mentre nella soluzione eterea decantata rimane il prodotto p. f. 127°, quasi puro.

Il prodotto giallo (p. f. 214°), è assai stabile in presenza di permanganato potassico. Esso fornì i seguenti risultati analitici:

I. gr. 0,1301 di sostanza dettero gr. 0,3970 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,0672 di H<sub>2</sub>O.  
II. gr. 0,2787 di sostanza dettero cc. 11,9 di azoto a 8° e 773 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
	I	II	
C	83,22	—	83,52
H	5,74	—	5,49
N	—	5,27	5,12

Questi risultati, che corrispondono ad una formula con due atomi di idrogeno in meno di quella del composto precedente (p. f. 127°), nonchè i rapporti genetici dei due prodotti, sono rispettivamente spiegati e dimostrati dalle esperienze seguenti.

*Ossidazione con ossido di mercurio del composto p. f. 127°.* — Grammi 0,60 di prodotto vennero scolti in etere, e si aggiunse loro a poco a poco un ugual peso di ossido giallo di mercurio, preparato di fresco ed in finissima polvere, agitando di continuo.

La soluzione ingiallì rapidamente, ed occorse tenerla raffreddata con acqua corrente perchè si scaldava notevolmente: si formarono presto dei minutissimi cristalli gialli, la quantità dei quali aumentò col procedere dell'ossidazione. Dopo aver lasciato il tutto un poco a sè, la soluzione eterea venne

separata per decantazione ma evaporando il solvente dette un ben piccolo residuo: la maggior parte del prodotto si trovava infatti mescolato al mercurio ridotto, da cui venne separato lavandolo ripetutamente con alcool boliente. La sostanza, ricristallizzata infine dall'alcool, si mostrò identica a quella già descritta col p. f. 214°, sia per i caratteri fisici, sia per i dati analitici seguenti:

gr. 0,2829 di sostanza dettero cc. 12,3 di azoto a 9° e 772 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
C	5,34	5,12

*Ossidazione, determinata dal reattivo di Barbier-Grignard, del composto p. f. 127°.* — Quantità equimolecolari del prodotto p. f. 127° e di bromuro di fenil-magnesio, sciolte in etere, si fecero bollire vivacemente per cinque ore. Durante l'ebullizione si separò in quantità sempre maggiore una polvere cristallina: la soluzione eterea e la polvere vennero poi trattate separatamente con ghiaccio ed acido solforico come nei casi antecedenti: però la soluzione eterea conteneva, insieme con alquanta sostanza di partenza inalterata solo poco prodotto p. f. 214°. La maggior parte di questo si trovava nella polvere separatasi durante l'ebullizione: e, purificato dall'alcool l'ottenemmo puro per l'analisi, con tutti i caratteri fisici del composto sopra descritto.

gr. 0,2100 di sostanza dettero cc. 9,4 di azoto a 11° e 758 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
N	5,36	5,12

Impiegando l'ioduro di etil-magnesio, l'ossidazione procedette anche più rapida.

*Ossidazione, determinata dall'aldeide benzoica, del composto p. f. 127°.* — Una piccola quantità del prodotto p. f. 127° venne sciolto in etere e fatto bollire per un'ora; ma non si formò in tal modo del composto p. f. 214°. La soluzione, che aveva solamente assunto un color giallo, venne addizionata d'un leggero eccesso di aldeide benzoica, e concentrata fortemente. Il recipiente, aperto, venne allora lasciato sul piano della stufa che riscalda la stanza di lavoro, e il giorno dopo già constatammo che si era formato del composto p. f. 214°.

Ripetemmo la preparazione partendo da gr. 1 del prodotto (p. f. 127°) che venne bagnato con poco etere e successivamente con lieve eccesso di benzaldeide: il recipiente venne tenuto, aperto, su bagno-maria tiepido, durante due giorni. Riprendendo poi con etere, per separare il composto dalla benzaldeide e dall'acido benzoico, ottenemmo i caratteristici cristallini gialli

in stato quasi di purezza; vennero ricristallizzati da alcool e sottoposti all'analisi.

gr. 0,2236 di sostanza dettero cc. 10 di azoto a 10° e 753 mm.

in cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
N	5,34	5,12

Abbiamo constatato che la medesima ossidazione si compie anche con acqua ossigenata.

*Scissione del derivato p. f. 214° con acido cromico.* — Alla soluzione in acido acetico glaciale di un grammo di sostanza, si aggiungono gr. 0,50 di acido cromico e si pone a ricadere per completare la ossidazione. Appena il solvente comincia a ricadere colorato in verde, si distilla in corrente di vapore. Da una prima porzione del liquido distillato, che ha color verde, cristallizza una sostanza bianca che fonde a 65° in un liquido verde: venne identificata per nitrosobenzolo trattando un po' della sua soluzione con il reattivo formato sciogliendo in acqua cloridrato di idrossilamina e la corrispondente quantità di carbonato sodico, ed aggiungendo un po' di  $\alpha$ -naftolo: il miscuglio delle due soluzioni reso alcalino assunse il bel colore rosso caratteristico del benzolazonaftolo. Sul liquido distillato rimanente, incoloro, galleggiano delle gocce oleose pure incolore, le quali, al contatto di un cristallino di benzofenone, si rapprendono in cristalli col p. f. 48°. A confermare che si tratta di benzofenone, gr. 0,60 della sostanza, così ottenuta, vennero disciolti con gr. 0,72 di cloridrato di idrossilamina nella mescolanza di cc. 7 di alcool e cc. 4 di acqua: si aggiunsero poi gr. 1,2 di soda caustica sciolti in cc. 1,5 di acqua, e si fece bollire per un'ora. Dopo raffreddamento, per aggiunta di acido acetico precipitò l'ossima in finissimi cristalli bianchi che, purificati da acqua ed alcool, fondevano esattamente a 141°.

gr. 0,1650 di sostanza dettero cc. 10 di azoto a 10° e 769 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>15</sub> NO
N	7,39	7,10

Questo secondo prodotto di scissione, identificato così come benzofenone, venne ottenuto con rendimento addirittura quantitativo; ciò che conferma completamente le nostre ipotesi sulla costituzione del composto p. f. 214°.

Come era da aspettarsi, trattando nella stessa maniera il composto p. f. 127°, arrivammo a risultati identici.

*Riduzione con zinco ed acido acetico della sostanza p. f. 127°.* — A gr. 1,50 di prodotto sciolti in alcool si aggiunge un grammo di acido

acetico, indi a poco a poco polvere di zinco in piccolo eccesso, scaldando leggermente. Si filtra infine a caldo, si lava con alcool lo zinco e si aggiunge acqua in eccesso alla soluzione: si separa così un olio denso pesante che viene ripreso con etere, con carbonato potassico, e quindi, cacciato il solvente, con etere di petrolio, da cui si ottiene in cristallini massicci p. f. 56°, quasi incolori.

gr. 0,2655 di sostanza dettero cc. 12,3 di azoto a 10° e 769 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>19</sub> H <sub>17</sub> N
N	5,65	5,40

La sostanza p. f. 127° si mostrò stabile all'azione dell'amalgama di alluminio.

Invece il composto p. f. 214°, ridotto con amalgama di alluminio, fornì la medesima base, identica a quella già preparata e descritta da Busch.

*Azione dell'ioduro di etil-magnesio sul composto p. f. 214°.* — Si fecero bollire per una mezz'ora quantità corrispondenti ad una molecola del composto ed una molecola ed un quarto di ioduro di etil-magnesio in soluzione eterea; ma, dopo trattamento analogo a quello usato nei casi precedenti, si ottennero soltanto cristalli della sostanza di partenza, identificati per il punto di fusione da soli ed in mescolanza con prodotto primitivo. Tale stabilità al reattivo di Barbier-Grignard del composto p. f. 214°, trova la sua corrispondenza nel fatto che il composto medesimo è assai stabile al permanganato potassico, come abbiamo fatto notare a suo luogo.

Dimostrata così la costituzione di questo interessante derivato, abbiamo tentato di ottenerlo per sintesi da benzofenone e fenilidrossilammina.

Un grammo di benzofenone, sciolto in alcool, venne trattato con gr. 0,60 di fenilidrossilammina: ma per quanto si lasciasse a sè e si innescasse la soluzione con un cristallino del composto 214°, non ne ottenemmo traccia. Riscaldammo allora da sole le stesse quantità di benzofenone e di fenilidrossilammina, in bagno di paraffina a 150°; ma neppure in tal modo si effettuò la sintesi desiderata.

*Riduzione con zinco e cloruro ammonico dell'etere N-fenilico della benzaldossima.* — Un grammo di benzafenilidrossilammina, sospeso in polvere finissima in assai etere, venne sbattuto con una soluzione acquosa di un grammo di cloruro ammonico a cui si aggiunse a poco a poco della polvere di zinco in piccolo eccesso. Scomparsi i cristalli del composto, l'etere separato détte, per evaporazione, la base di Schiff (benzalanilina) sotto forma di un liquido denso, che non cristallizzava. Allo scopo di ottenere sostanza pura, si distillò il residuo dall'evaporazione dell'etere in corrente di vapore; e le gocce oleose che passarono con l'acqua, al contatto di un cristallino di

benzalanilina, si rappresero in cristalli che fondevano a 50° e per idrolisi con acido solforico diluito dettero aldeide benzoica ed anilina.

Riducendo col medesimo procedimento il composto p. f. 214°, avremmo dovuto ottenere il fenilimidobenzofenone o benzofenonanilina, già conosciuto e descritto (¹); ma arrivammo invece ad un derivato col p. f. 83°, il quale, per quanto alle analisi risulti della medesima composizione della benzofenonanilina, è assai diverso nei suoi caratteri ed esige quindi studi ulteriori.

*Ossidazione della β-dibenzilidrossilammina con ossido di mercurio.* — Sei grammi di questo derivato, sciolti in cloroformio, vennero ossidati con un ugual peso di ossido giallo di mercurio, che venne aggiunto a poco a poco agitando continuamente: per evaporazione del solvente, si ottenne una sostanza incolore, che, ricristallizzata da etere, fondeva a 82° e si identifica, per i suoi caratteri, per l'etere N-benzilico della benzaldossima, già preparato per altra via e descritto nella letteratura.

*Azione del bromuro di magnesio fenile sull'etere N-benzilico della benzaldossima.* — Si bolle per un'ora la soluzione etera contenente per ogni molecola della sostanza p. f. 82° una molecola e un quarto di bromuro di fenil-magnesio, e infine, con il trattamento descritto precedentemente, si ottiene una bella sostanza bianca, che, purificata da etere di petrolio, fonde a 105°; è assai solubile in etere.

gr. 0,1941 di sostanza dettero cc. 8,4 di azoto a 10°,5 e 758 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>20</sub> H <sub>18</sub> NO
N	5,19	4,84

È instabile al permanganato potassico.

*Ossidazione con ossido di mercurio della sostanza descritta.* — La sostanza (p. f. 105°), sciolta in etere, venne ossidata con l'ugual peso di ossido giallo di mercurio e, siccome l'ossidazione procedeva assai più lentamente che nei casi precedenti, si bollì infine a ricadere per una mezz'ora. Durante l'ebullizione si formarono minutissimi cristalli incolori che vennero separati dalla soluzione etera per decantazione dopo raffreddamento e ripresi poi con cloroformio per estrarli dal mercurio ridotto fra cui erano impigliati. Vennero infine cristallizzati, insieme col residuo dall'evaporazione dell'etere prima separato, da etere solforico, e si ottennero così puri per analisi, col p. f. 159°.

gr. 0,1885 di sostanza dettero cc. 8,1 di azoto a 9°,5 e 764 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per C <sub>20</sub> H <sub>17</sub> NO
N	5,22	4,88

(¹) Annalen, 187, pag. 199.

Come il composto omologo p. f. 214°, essa è stabile al permanganato, ma non così all'azione dell'ioduro di magnesio-etile: si arriva, in tal caso, ad un olio giallo-arancio, molto solubile negli ordinari solventi e che non accenna a cristallizzare.

*Scissione con acido cromico di quest'ultima sostanza.* — Un grammo di prodotto, disiolto in acido acetico, vien trattato con gr. 0,65 di acido cromico: si scalda alquanto a ricadere, e, quando la soluzione ha assunto una colorazione verde-scura, si distilla in corrente di vapore.

Una prima porzione del liquido che passa odora fortemente di aldeide benzoica: per identificarla, ne preparammo un derivato ben noto e caratteristico, la azina, e ne potemmo ottenere in quantità da riconoscere tutti i suoi caratteri.

Nell'altra porzione di liquido distillato si nota odore di benzofenone; si raccolsero infatti dei cristalli incolori col p. f. 45° e che, trattati con idrossilammina, dettero l'ossima caratteristica del benzofenone col p. f. 141°. Otteniamo dunque due prodotti di scissione, aldeide benzoica e benzofenone, in armonia con la costituzione assegnata al derivato.

Completeremo lo studio di queste interessanti reazioni.

**Fisica matematica.** — *Sulle vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio G. A. MAGGI.

In questa Nota espongo brevemente alcuni risultati della mia tesi di Abilitazione (¹) che permettono di risolvere in modo completo il problema della rappresentazione analitica delle vibrazioni di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso. Come è noto, le formule date da Lamé (²) come soluzione di tale problema, anzi del problema analogo relativo al caso più generale dei mezzi cristallini biazzici, per le singolarità delle funzioni che in esse compariscono, non corrispondono allo scopo pel quale sono state cercate (³).

Le equazioni differenziali fondamentali della teoria elastica della luce, in un mezzo cristallino uniassico non soggetto ad azioni perturbatrici esterne, quando si assuma come sistema coordinato un sistema cartesiano ortogonale ( $x y z$ ) coll'asse  $z$  parallelo all'asse ottico del mezzo e si rappresentino con

(¹) *Sulla teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici* (in corso di stampa negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa).

(²) *Leçons sur l'élasticité.* 23<sup>e</sup> leçon.

(³) V. Volterra, *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Introduction.* Acta Math. Bd. XVI.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{c}$  rispettivamente la lunghezza di un qualunque asse dell'ellissoide di elasticità relativo al mezzo considerato, parallelo al piano  $xy$  e la lunghezza dell'asse dello stesso ellissoide parallelo all'asse  $z$ , e si rappresentino con  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti dello spostamento elastico presente al tempo  $t$  nel punto  $(xyz)$ , sono, come è noto, le seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Un qualunque loro integrale  $\xi, \eta, \zeta$  si può ottenere da un conveniente integrale  $\varphi, \psi$  del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x \varphi - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x \psi + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \end{cases}$$

ponendo

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \eta = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \zeta = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1).$$

Poniamo

$$(3) \quad \begin{cases} f_1[\alpha, \beta] = \frac{\alpha \left( t - \frac{r}{a} \right)}{4\pi a^2 r} - \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial y} \int_{t - \frac{r}{a}}^{t - \frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial v} - \beta(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} d\tau = \\ = \frac{\alpha \left( t - \frac{r}{a} \right)}{4\pi c^2 r} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t - \frac{r}{a}}^{t - \frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial u} + \beta(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} d\tau \\ f_2[\alpha, \beta] = \frac{\beta \left( t - \frac{r}{a} \right)}{4\pi a^2 r} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t - \frac{r}{a}}^{t - \frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial v} - \beta(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} d\tau = \\ = \frac{\beta \left( t - \frac{r}{a} \right)}{4\pi c^2 r} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial y} \int_{t - \frac{r}{a}}^{t - \frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial u} + \beta(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} d\tau \end{cases}$$

(1) V. Volterra, Mem. cit., Art. 8, 1.

ove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(x^2 + y^2) \frac{a^2}{c^2} + z^2}, \quad \chi = \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e  $\alpha(\tau)$   $\beta(\tau)$  sono due funzioni arbitrarie del loro argomento che nel seguito supporremo nulle per tutti i valori di  $\tau$  inferiori algebricamente ad un valore fissato. Allora le formule

$$(4) \quad \varphi = f_1[\alpha, \beta], \quad \psi = f_2[\alpha, \beta] \quad (*)$$

almeno se le funzioni  $\alpha, \beta$  sono finite e continue insieme alle loro derivate 1<sup>e</sup> 2<sup>e</sup> ...  $n^e$  ( $n \geq 3$ ), ci daranno il più generale integrale del sistema (2) regolare per qualunque valore del tempo insieme alle sue derivate 1<sup>e</sup> 2<sup>e</sup> ...  $(n-1)^e$  in tutto lo spazio fuorché nel punto  $x=y=z=0$ . Infatti essendo identicamente

$$\begin{aligned} f_1[\alpha, \beta] &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{x}{x^2 + y^2} \alpha \left( t - \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \right) \frac{z' dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{x}{x^2 + y^2} \beta \left( t - \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \right) \frac{z' dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \right\} - \\ &- \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \dot{\alpha}(\tau) d\tau \right\} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \dot{\beta}(\tau) d\tau \right\} \\ f_2[\alpha, \beta] &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{y}{x^2 + y^2} \alpha \left( t - \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \right) \frac{z' dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{y}{x^2 + y^2} \beta \left( t - \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \right) \frac{z' dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \alpha(\tau) d\tau \right\} - \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \beta(\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

(\*) Questi integrali del sistema (2) — in una forma leggermente diversa che rende meno evidente la loro regolarità fuori del punto  $x=y=z=0$  — furono ottenuti per la prima volta dal prof. Grünwald nella sua Memoria: *Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig-krystallinischen Medien* (Sitzungsberichte der k. Ak. der W. in Wien; Math-naturw. Classe, Bd. CXI, Abth. II, a. april 1902) ricercando l'espressione dell'integrale generale  $\varphi, \psi$  del sistema (2) per i valori che ad un istante iniziale fissato prendono le funzioni  $\varphi, \psi$  e le loro derivate prime rispetto al tempo. Nella stessa Memoria Egli risolve la questione che forma il soggetto della presente Nota assumendo come espressioni delle componenti  $\xi, \eta, \zeta$  degli spostamenti el-

e le due terne di funzioni

$$\frac{1}{r} \frac{xz}{x^2 + y^2} \alpha\left(t \pm \frac{r}{a}\right), \frac{1}{r} \frac{yz}{x^2 + y^2} \alpha\left(t \pm \frac{r}{a}\right), -\frac{1}{r} \alpha\left(t \pm \frac{r}{a}\right);$$

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} \alpha\left(t \pm \frac{r}{a}\right), \frac{x}{x^2 + y^2} \alpha\left(t \pm \frac{r}{a}\right), 0$$

dando due integrali del sistema (1) — integrali di Lamé — colla posizione fatta si ottiene certamente un integrale del sistema (2). E questo risulta il più generale che soddisfi alla condizione suddetta in base al teorema seguente, che estende agli integrali del sistema (2) un ben noto teorema di Kirchhoff relativo agli integrali dell'equazione  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$ :

Sia  $\sigma$  una superficie chiusa avvolgente un punto fissato  $(xyz)$ ,  $n$  la sua normale interna in un suo punto qualunque  $(x'y'z')$ . Dato un integrale  $\varphi, \psi$  del sistema (2), almeno se esso è finito e continuo insieme alle sue derivate prime e seconde nell'interno di  $\sigma$  per tutto un intervallo di tempo convenientemente esteso, avremo:

---

stici originati in un mezzo cristallino uniaxico dalla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto  $x=y=z=0$ :

$$\xi = f_1[\alpha, \beta] \quad , \quad \eta = f_2[\alpha, \beta] \quad , \quad \zeta = \frac{1}{4\pi a^2} \gamma \left( t - \frac{r}{a} \right),$$

ove  $\gamma$ , al pari di  $\alpha$  e  $\beta$ , è una funzione arbitraria del suo argomento.

Ciò però non è legittimo perchè, anche disponendo della forma delle funzioni  $\alpha, \beta, \gamma$ , non si ha mai per ogni valore di  $x, y, z$  se non è identicamente  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1[\alpha, \beta] + \frac{\partial}{\partial y} f_2[\alpha, \beta] + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi a^2} \gamma \left( t - \frac{r}{a} \right) = \\ = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\alpha \left( t - \frac{r}{a} \right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\beta \left( t - \frac{r}{a} \right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\gamma \left( t - \frac{r}{a} \right)}{r} \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 g(xyzt) = & \int_{\sigma} d\sigma \left\{ a^2 \frac{d}{dn} f_1 [\varphi(x'y'z't), \psi(x'y'z't)] - \right. \\
 & - a^2 f_1 \left[ \frac{\partial}{\partial n} \varphi(x'y'z't), \frac{\partial}{\partial n} \psi(x'y'z't) \right] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos ny' \frac{d}{dy'} f_1 [\varphi(x'y'z't), 0] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos ny' f_1 \left[ \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(x'y'z't), 0 \right] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos nx' \frac{d}{dx'} f_1 [0, \psi(x'y'z't)] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos nx' f_1 \left[ 0, \frac{\partial}{\partial x'} \psi(x'y'z't) \right] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos ny' \frac{d}{dx'} f_1 [0, \varphi(x'y'z't)] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos nx' f_1 \left[ 0, \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(x'y'z't) \right] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos nx' \frac{d}{dy'} f_1 [\psi(x'y'z't), 0] - \\
 & \left. - (a^2 - c^2) \cos ny' f_1 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x'} (x'y'z't), 0 \right]; \right. \\
 \hline
 (5) \quad \psi(xyzt) = & \int_{\sigma} d\sigma \left\{ a^2 \frac{d}{dn} f_2 [\varphi(x'y'z't), \psi(x'y'z't)] - \right. \\
 & - a^2 f_2 \left[ \frac{\partial}{\partial n} \varphi(x'y'z't), \frac{\partial}{\partial n} \psi(x'y'z't) \right] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos ny' \frac{d}{dy'} f_2 [\varphi(x'y'z't), 0] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos ny' f_2 \left[ \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(x'y'z't), 0 \right] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos nx' \frac{d}{dx'} f_2 [0, \psi(x'y'z't)] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos nx' f_2 \left[ 0, \frac{\partial}{\partial x'} \psi(x'y'z't) \right] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos ny' \frac{d}{dx'} f_2 [0, \varphi(x'y'z't)] - \\
 & - (a^2 - c^2) \cos nx' f_2 \left[ 0, \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(x'y'z't) \right] + \\
 & + (a^2 - c^2) \cos nx' \frac{d}{dy'} f_2 [\psi(x'y'z't), 0] - \\
 & \left. - (a^2 - c^2) \cos ny' f_2 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x'} (x'y'z't), 0 \right], \right.
 \end{aligned} \right.$$

ove

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos nx' + \frac{\partial}{\partial y'} \cos ny' + \frac{\partial}{\partial z'} \cos nz'$$

e le  $\frac{d}{dx'}, \frac{d}{dy'}, \frac{d}{dz'}, \frac{d}{dn} = \frac{d}{dx'} \cos nx' + \frac{d}{dy'} \cos ny' + \frac{d}{dz'} \cos nz'$ , sono da intendere eseguite senza tener conto della dipendenza delle  $\varphi, \psi$  dalle variabili  $x'y'z'$  (¹).

La più semplice soluzione del sistema (1) atta a rappresentare le vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniaxiale dovute alla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto  $x = y = z = 0$  (e tale che non sia identicamente  $\xi = 0$ ) (²) si otterrà dunque ponendo

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z} f_1[\alpha, \beta], \quad \eta = \frac{\partial}{\partial z} f_2[\alpha, \beta], \quad \zeta = -\frac{\partial}{\partial x} f_1[\alpha, \beta] - \frac{\partial}{\partial y} f_2[\alpha, \beta].$$

Tenendo conto delle espressioni effettive (3) di  $f_1[\alpha, \beta]$  e  $f_2[\alpha, \beta]$ , essa si può porre nella forma seguente:

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi^{(0)} + \xi^{(\bar{0})} + \xi^{(s)} + \xi^{(\bar{s})}, & \eta &= \eta^{(0)} + \eta^{(\bar{0})} + \eta^{(s)} + \eta^{(\bar{s})}, \\ \zeta &= \zeta^{(0)} + \zeta^{(\bar{0})} + \zeta^{(s)} + \zeta^{(\bar{s})} \end{aligned}$$

(¹) Sono pervenuto alle formule (5) con un metodo analogo a quello tenuto da Kirchhoff (V. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Sitzungsberichte der k. Akademie der W. in Berlin, 1882) basandomi sulla conoscenza degli integrali (4) del sistema (2). Ma nella mia tesi d'Abilitazione ho riportato anche un'altra dimostrazione che delle stesse formule ha dato il prof. Grünwald e che, quantunque non sia stata ancora resa nota per mezzo della stampa, pure molto gentilmente mi è stata da Lui comunicata, quando ero già in possesso delle formule in questione.

(²) In tal caso le funzioni  $\xi, \eta$  ci danno un integrale  $\varphi, \psi$  del sistema (2) per quale  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ , e si ottengono necessariamente da una conveniente soluzione dell'equazione  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  ponendo  $\xi = -\frac{\partial f}{\partial y}, \eta = \frac{\partial f}{\partial x}$ . Fra le soluzioni del sistema (1) per le quali è identicamente  $\zeta = 0$  e che sono regolari in tutto lo spazio fuorché nel punto  $x = y = z = 0$ , la più semplice è data da

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\bar{r}} \alpha \left( t \pm \frac{\bar{r}}{a} \right) \quad \eta = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\bar{r}} \alpha \left( t \pm \frac{\bar{r}}{a} \right) \quad \zeta = 0.$$

ove:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^{(0)} = -\frac{xz}{a^3 r^2} \left\{ \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} t - \frac{r}{a} \\ \eta^{(0)} = -\frac{yz}{a^3 r^2} \left\{ \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} t - \frac{r}{a} \\ \zeta^{(0)} = \frac{x^2 + y^2}{a^3 r^2} \left\{ \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} t - \frac{r}{a} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^{(\bar{0})} = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{z}{r} \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} d\tau \\ \eta^{(\bar{0})} = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{z}{r} \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} d\tau \\ \zeta^{(\bar{0})} = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{a}} \frac{x^2 + y^2}{r^3} \left\{ \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} \right\} d\tau \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^{(s)} = -\frac{yz}{ac^2 \bar{r}^2} \left\{ \frac{\alpha y - \beta x}{x^2 + y^2} \right\} t - \frac{\bar{r}}{a} \\ \eta^{(s)} = -\frac{xz}{ac^2 \bar{r}^2} \left\{ \frac{\alpha y - \beta x}{x^2 + y^2} \right\} t - \frac{\bar{r}}{a} \\ \zeta^{(s)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^{(\bar{s})} = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{z}{\bar{r}} \frac{\alpha y - \beta x}{x^2 - y^2} \right\} d\tau \\ \eta^{(\bar{s})} = -\frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{z}{\bar{r}} \frac{\alpha y - \beta x}{x^2 + y^2} \right\} d\tau \\ \zeta^{(\bar{s})} = 0. \end{array} \right.$$

Secondo queste formule il movimento elastico originato in un mezzo cristallino uniassico dalla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto  $x = y = z = 0$ , sarà da considerare come risultante dalla composizione di quattro movimenti pei quali, ad un istante qualunque, lo spostamento del punto  $(xyz)$  è rappresentato rispettivamente dai quattro vettori

$$(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}) \quad (\xi^{(\bar{0})}, \eta^{(\bar{0})}, \zeta^{(\bar{0})}) \quad (\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}) \quad (\xi^{(\bar{s})}, \eta^{(\bar{s})}, \zeta^{(\bar{s})}).$$

Evidentemente nessuno di questi quattro movimenti, e neppure l' uno o l' altro dei due movimenti corrispondenti agli spostamenti

$$(\xi^{(0)} + \xi^{(\bar{0})}, \eta^{(0)} + \eta^{(\bar{0})}, \zeta^{(0)} + \zeta^{(\bar{0})}) \quad (\xi^{(s)} + \xi^{(\bar{s})}, \eta^{(s)} + \eta^{(\bar{s})}, \zeta^{(s)} + \zeta^{(\bar{s})}),$$

può avere un'esistenza fisica a sè.

Il movimento corrispondente al vettore  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$  si propaga dal centro luminoso per onde sferiche e il movimento corrispondente al vettore  $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$  per onde ellissoidiche  $\bar{r} = \text{cost}$ . Le direzioni degli spostamenti competenti in questi due movimenti a un punto qualunque dello spazio non variano al variar del tempo, e coincidono colle direzioni dei due diametri principali dell'ellisse sezione dell'ellisse di elasticità relativo al punto sede del centro luminoso col piano condotto per tal punto normalmente alla retta che lo unisce al punto del mezzo per cui ci riferiamo.

Al contrario le direzioni dei due vettori

$$(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}) \text{ e } (\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$$

variano col tempo e i movimenti corrispondenti non sono ondulatori. I valori delle due funzioni  $\alpha, \beta$  ad un certo istante  $\tau$  non contribuiscono ad un qualunque istante successivo  $t$  soltanto alla formazione dei valori delle funzioni  $\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}$  e  $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}$ , relativi ai punti di una superficie, ma contribuiscono invece alla formazione dei valori di tali funzioni relativi a tutti quanti i punti rispettivamente interni alla sfera  $r = a(t - \tau)$  e all'elissoide  $\bar{r} = a(t - \tau)$ , cioè a tutti quanti i punti nei quali precedentemente all'istante  $t$  i valori delle funzioni  $\alpha, \beta$  all'istante  $\tau$  hanno avuto parte nella formazione delle funzioni  $\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}$  e  $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}$ .

Ciò si può interpretare dicendo che le singole onde dalle quali risultano i due movimenti corrispondenti al vettore  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$  e al vettore  $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$  suscitano in tutto lo spazio da esse attraversato delle vibrazioni perenni che combinate tra di loro danno appunto origine ai due movimenti corrispondenti al vettore  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$  e al vettore  $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$ .

Ciò non è in contraddizione coi risultati sperimentali, perchè, se le due funzioni  $\alpha, \beta$  sono periodiche con un periodo molto breve, i due vettori  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$  e  $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}$  risultano sempre trascurabili rispetto ai vettori  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$  e  $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$ , e lo stesso accade, qualunque sia la forma delle funzioni  $\alpha, \beta$ , nel caso di un centro luminoso a distanza grandissima, nel qual caso le formule (6) si riducono a quelle che necessariamente rappresentano gli spostamenti elastici presenti nei singoli punti di un mezzo uniassiale quando si ammette *a priori* che il mezzo stesso debba risultare sede di una propagazione di onde piane.

Quanto ora abbiamo detto rende ragione anche del fatto che gli integrali di Lamé non risultano adatti a rappresentare il movimento elastico originato in un mezzo cristallino dalla presenza di un'unica sorgente luminosa di dimensioni piccolissime. Infatti tali integrali furono ottenuti in base al concetto che un tal movimento dovesse risultare da una successione di onde sferiche e di onde ellissoidiche  $\bar{r} = \text{cost.}$  propagantesi nel mezzo, le une *indipendentemente* dalle altre, senza lasciar traccia del loro passaggio.

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.*

Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

1. Il prof. Volterra <sup>(1)</sup> chiama *funzioni permutabili di seconda specie* due funzioni  $F(x, y)$ ,  $K(x, y)$  finite e continue, le quali soddisfano alla relazione:

$$(1) \quad \int_a^b F(x, s) K(s, y) ds = \int_a^b K(x, s) F(s, y) ds = g(x, y).$$

Scopo di questa Nota è di mostrare come introducendo le funzioni ortogonali di Schmidt, possano determinarsi le funzioni  $K(x, y)$  permutabili di seconda specie con una data funzione  $F(x, y)$ , che sia uguale alla somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola  $x$  per un'altra funzione della sola  $y$ .

Poichè qui ci occuperemo della sola permutabilità di seconda specie, diremo brevemente che tutte le funzioni  $K(x, y)$  che soddisfano alla (1) sono permutabili colla  $F(x, y)$ .

Supponiamo poi che la funzione data sia espressa mediante il corrispondente sistema ortogonale completo  $\varphi_r(x)$ ,  $\psi_r(y)$ , ossia supponiamo che sia:

$$(2) \quad F(x, y) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x) \psi_r(y)}{\lambda_r};$$

ove:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_h(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}; \quad \int_a^b \psi_i(y) \psi_h(y) dy = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}.$$

Notiamo anzitutto che se

$$(3) \quad \int_a^b F(x, s) K(s, y) ds = g(x, y),$$

la  $g(x, y)$  dovrà soddisfare alla relazione

$$(4) \quad g(x, y) = \sum_{r=1}^n \varphi_r(x) \int_a^b \varphi_r(s) g(s, y) ds,$$

<sup>(1)</sup> Volterra, *Sopra le funzioni permutabili*. Rendiconti R. Accad. Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XIX, 1<sup>o</sup> semestre 1910.

e se  $K_1(x, y)$  è una soluzione della (3), la soluzione generale della (3) è data da <sup>(1)</sup>

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \theta(x, y),$$

essendo  $\theta(x, y)$  la soluzione generale dell'equazione

$$(5) \quad \int_a^b F(x, y) \theta(s, y) ds = 0$$

e quindi

$$(6) \quad \theta(x, y) = \omega(x, y) - \sum_{r=1}^n \psi_r(x) \int_a^b \psi_r(s) \omega(s, y) ds,$$

essendo la  $\omega(x, y)$  una funzione arbitraria integrabile.

Parimenti se

$$(7) \quad \int_a^b K(x, y) F(s, y) ds = g(x, y)$$

sarà

$$(8) \quad g(x, y) = \sum_{r=1}^n \psi_r(y) \int_a^b g(x, t) \psi_r(t) dt$$

e se  $K_2(x, y)$  è soluzione della (7), la soluzione generale della (7) stessa è

$$K(x, y) = K_2(x, y) + \xi(x, y),$$

essendo  $\xi(x, y)$  la soluzione generale dell'equazione

$$(9) \quad \int_a^b \xi(x, s) F(s, y) ds = 0,$$

e quindi

$$(10) \quad \xi(x, y) = \varrho(x, y) - \sum_{r=1}^n \varphi_r(y) \int_a^b \varrho(x, t) \varphi_r(t) dt,$$

essendo  $\varrho(x, y)$  una funzione arbitraria integrabile.

Intanto dalle (4), (8) si ha

$$g(x, y) = \sum_{i,h=1}^n \varphi_i(x) \psi_h(y) \int_a^b \varphi_i(s) ds \int_a^b g(s, t) \psi_h(t) dt,$$

ossia

$$(11) \quad g(x, y) = \sum_{i,h=1}^n a_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y).$$

<sup>(1)</sup> Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*. Rendic. R. Accad. Lincei, ser. 5<sup>a</sup>, vol. XVII, 1<sup>o</sup> semestre 1908.

essendo  $a_{i,h}$  delle costanti. Per determinarle rammentiamo <sup>(1)</sup> che la  $g(x, y)$  definita dalla (11) deve essere una funzione permutabile colla  $F(x, y)$ , cioè sarà

$$\int_a^b F(x, s) g(s, y) ds = \int_a^b g(x, s) F(s, y) ds;$$

quindi se poniamo

$$A_{i,h} = \int_a^b \varphi_i(s) \psi_h(s) ds$$

dovrà aversi

$$\sum_{i,h=1}^n \left\{ \frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^n A_{h,r} a_{i,r} - \frac{1}{\lambda_i} \sum_{r=1}^n A_{r,i} a_{r,h} \right\} \varphi_i(x) \psi_h(y) = 0 :$$

e poichè le  $\varphi_i(x)$  sono fra loro linearmente indipendenti e così pure lo sono le  $\psi_h(y)$ , le  $n^2$  costanti  $a_{i,h}$  dovranno soddisfare alle  $n^2$  relazioni

$$(12) \quad \lambda_i \sum_{r=1}^n A_{h,r} a_{i,r} - \lambda_h \sum_{r=1}^n A_{r,i} a_{r,h} = 0, \quad (i, h = 1, 2, \dots, n)$$

Posto ciò preso un sistema di valori  $a_{i,h}$  che soddisfano alle (12) cerchiamo la soluzione più generale dell'equazione

$$(13) \quad \int_a^b F(x, s) K(s, y) ds = \sum_{i,h=1}^n a_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y) :$$

A tale scopo cerchiamo di determinare le costanti  $b_{i,h}$  in modo che la funzione

$$(14) \quad K_1(x, y) = \sum_{i,h=1}^n b_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y)$$

sia una soluzione della (13). In tal caso dalla (13), ponendovi per  $K(x, y)$  la  $K_1(x, y)$  data dall'espressione precedente, si ha

$$\sum_{i,h=1}^n \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \sum_{r=1}^n A_{r,i} b_{r,h} - a_{i,h} \right\} \varphi_i(x) \psi_h(y) = 0$$

e quindi le  $b_{i,h}$  soddisferanno alle relazioni

$$(15) \quad \sum_{r=1}^n A_{r,i} b_{r,h} = \lambda_i a_{i,h} \quad (i, h = 1, 2, \dots, n).$$

(1) Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro differenziali*. Rendic. R. Accad. Lincei, ser. 5<sup>a</sup>, vol. XLIX, 1<sup>o</sup> semestre 1910.

Ora si vede facilmente che se

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

il determinante del sistema (15) è  $D^n$ , e se denotiamo con  $P_{i,h}$  il complemento algebrico di  $A_{i,h}$  nel determinante  $D$  (che supponiamo diverso da zero) deduciamo dalle (15)

$$(16) \quad b_{i,h} = \frac{1}{D} \sum_{r=1}^n \lambda_r P_{i,r} a_{r,h} \quad (i, h = 1, \dots, n).$$

La soluzione generale della (13), quando le costanti  $a_{i,h}$  soddisfano alle (12) è dunque

$$(17) \quad K(x, y) = \sum_{i,h=1}^n b_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y) + \theta(x, y);$$

ove  $\theta(x, y)$  è la soluzione generale della (15) ed è quindi data dalla (6); le costanti  $b_{i,h}$  sono poi date dalle (16).

Osserviamo poi che per la (14)

$$\int_a^b K_1(x, s) F(s, y) ds = \sum_{i,r,h=1}^n \frac{1}{\lambda_h} A_{hr} b_{i,r} \varphi_i(x) \psi_h(y);$$

ma per le (16)

$$\frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^n A_{hr} b_{i,r} = \frac{1}{D \lambda_h} \sum_{s=1}^n \lambda_s P_{i,s} \sum_{r=1}^n A_{hr} a_{s,r},$$

e per le (12)

$$(18) \quad \frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^n A_{hr} b_{i,r} = \frac{1}{D} \sum_{r,s=1}^n P_{i,s} A_{r,s} a_{r,h} = a_{i,h}.$$

Quindi si ha

$$\int_a^b K_1(x, s) F(s, y) ds = \sum_{i,h=1}^n a_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y),$$

e la funzione  $K_1(x, y)$  definita dalla (14) ed i cui coefficienti sono dati dalle (16) è una funzione permutabile colla  $F(x, y)$ .

Dunque perchè la  $K(x, y)$  definita dalla (17) sia permutabile colla  $F(x, y)$  bisogna che  $\theta(x, y)$  sia una funzione permutabile colla  $F(x, y)$  stessa. Ma la  $\theta(x, y)$  è la soluzione generale della (5), dunque essa dovrà pure soddisfare alla (9); sarà cioè la soluzione generale comune alle (5), (9).

Concludiamo così che la funzione più generale permutabile colla nostra  $F(x, y)$  è data da

$$(19) \quad K(x, y) = \sum_{i,h=1}^n b_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y) + \alpha(x, y) -$$

$$- \sum_{r=1}^n \varphi_r(y) \int_a^b \alpha(x, t) \varphi_r(t) dt - \sum_{r=1}^n \psi_r(x) \int_a^b \psi_r(s) \alpha(s, y) ds +$$

$$+ \sum_{i,h=1}^n \varphi_i(y) \psi_h(x) \int_a^b \psi_h(s) ds \int_a^b \alpha(s, t) \varphi_i(t) dt,$$

essendo  $\alpha(x, y)$  una funzione arbitraria integrabile e le  $b_{i,h}$  costanti determinate dalle (16).

Dalle relazioni precedenti possiamo anche facilmente trovare le relazioni cui soddisfanno le costanti  $b_{i,h}$ ; infatti dalle (15), (18) si deduce subito

$$(20) \quad \lambda_i \sum_{r=1}^n A_{hr} b_{i,r} - \lambda_h \sum_{r=1}^n A_{ri} b_{r,h} = 0 \quad (i, h = 1, \dots, n),$$

cioè le  $b_{i,h}$  soddisfanno alle stesse equazioni cui soddisfanno le  $a_{i,h}$ .

In particolare se  $F(x, y)$  è una costante, poichè allora

$$\varphi(x) = \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{b-a}},$$

la funzione più generale permutabile con una costante sarà

$$K(x, y) = \alpha(x, y) - \frac{1}{b-a} \left\{ \int_a^b \alpha(x, t) dt + \int_a^b \alpha(s, y) ds \right\} + c,$$

essendo  $c$  una costante arbitraria.

2. Per risolvere completamente il nostro problema dobbiamo ora occuparci delle determinazioni delle costanti  $a_{i,h}$ , oppure delle  $b_{i,h}$ .

Se poniamo

$$\Gamma_i \equiv \sum_{r=1}^n (A_{ir} a_{ir} - A_{ri} a_{ri})$$

$$\Delta_{i,h} \equiv \lambda_i \sum_{r=1}^n A_{hr} a_{ir} - \lambda_h \sum_{r=1}^n A_{ri} a_{r,h} \quad (i \neq h),$$

il sistema (12) consta delle  $n$  equazioni  $\Gamma_i = 0$  e delle  $n(n-1)$  equazioni  $\Delta_{i,h} = 0$ . Tali equazioni però non sono linearmente indipendenti perchè se

le  $A_{i,h}$  con  $i \neq h$  non sono nulle, fra le  $\mathcal{A}_{i,h}$ ,  $\Gamma_i$  sussistono queste  $n$  relazioni

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,h=1}^n \frac{\mathcal{A}_{i,h}}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{r \neq i,h} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-1}}} \begin{vmatrix} A_{i,h} & A_{i,r_1} & \dots & A_{i,r_{s-1}} \\ A_{r_1,h} & A_{r_1r_1} & \dots & A_{r_1r_{s-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r_{s-1},h} & A_{r_{s-1}r_1} & \dots & A_{r_{s-1}r_{s-1}} \end{vmatrix} = \\ & = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{vmatrix} A_{r_1r_1} \dots A_{r_1r_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r_sr_1} \dots A_{r_sr_s} \end{vmatrix} \\ & \quad (s = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned}$$

ove  $\sum_{i,h=1}^n$  intende esteso a tutte le  $n(n-1)$  disposizioni semplici della classe seconda degli indici  $1, 2, \dots, n$ ; il  $\sum_{r \neq i,h}$  va esteso a tutte le  $\binom{n-2}{s-1}$  combinazioni della classe  $s-1$  degli indici  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, h-1, h+1, \dots, n$  ed il  $\sum_{r \neq i}$  va esteso a tutte le  $\binom{n-1}{s}$  combinazioni della classe  $s$  degli indici  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ .

Perciò il grado di indeterminazione del sistema (12) [oppure del sistema (20)] è in generale  $n$ ; e se poniamo

$$p_{i,h} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h; \end{cases}$$

la soluzione del sistema (20) quando  $D \neq 0$  e le  $A_{i,h}$  con  $i \neq h$  non sono tutte nulle è data in generale da

$$b_{h,i} = p_{h,i} c_0 + \sum_{s=0}^{n-2} \frac{c_{s+1}}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{r \neq i,h} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{vmatrix} A_{i,h} & A_{i,r_1} & \dots & A_{i,r_s} \\ A_{r_1,h} & A_{r_1r_1} & \dots & A_{r_1r_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r_s,h} & A_{r_sr_1} & \dots & A_{r_sr_s} \end{vmatrix},$$

essendo le  $c$  delle costanti arbitrarie.

Ponendo tale valore delle  $b_{i,h}$  nella (19) avremo la espressione della funzione richiesta.

Invece quando tutte le  $A_{i,h}$  con  $i \neq h$  sono nulle il sistema (12) diviene

$$(\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii}) a_{i,h} = 0 \quad (i, h = 1 \dots n)$$

e da tale relazione segue che le  $a_{i,h}$  relative agli indici  $i, h$  per quali

$\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii} = 0$  possono prendersi arbitrariamente, mentre le  $\alpha_{i,h}$  relative agli indici  $i, h$  per quali  $\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii} \neq 0$  devono essere nulle.

Così se le  $\lambda_r$  sono tutte fra loro diverse, la funzione generale permutabile col nucleo  $\sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x) \varphi_r(y)}{\lambda_r}$  è data da

$$\sum_{r=1}^n a_r \varphi_r(x) \varphi_r(y) + \Phi(x, y),$$

essendo le  $a_r$  delle costanti arbitarie e  $\Phi(x, y)$  la soluzione comune alle (5), (9). Invece se  $\varphi_r(x)$ , ( $r = 1, 2, \dots, 2n$ ) sono  $2n$  funzioni ortogonali e si pone

$$\psi_r(x) = \varphi_{n+r}(x) \quad (r = 1 \dots n)$$

il nucleo  $\sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x) \psi_r(y)}{\lambda_r}$  è permutabile con la funzione

$$\sum_{i,h=1}^n \alpha_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y)$$

qualunque siano i valori delle costanti  $\alpha_{i,h}$ .

**Meccanica.** — *Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto, riscaldato al centro o alla periferia.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. Un disco di bismuto è sospeso tra le facce polari d'un elettromagnete, a  $45^\circ$  dalle linee di forza, per mezzo di un filo che compensa con la sua torsione la tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo del disco.

Inviando nel centro di questo un sottile fascio di luce, che lo riscalda anche lievemente, si manifesta l'esistenza d'una energica coppia che tende ad annullare l'orientazione diamagnetica, e a disporlo perciò parallelamente alle linee di forza. L'azione non s'inverte invertendo il senso del campo; cambia invece di segno se del disco si scalda con un fascio di luce anulare, o altrimenti, la periferia. La coppia è massima a  $45^\circ$  dalle linee di forza e può allora raggiungere un valore rilevante così da superare la forte tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo, specialmente se il disco è un poco affumicato.

2. La teoria elettronica dei metalli ci rende conto facilmente dell'effetto osservato.

Secondo il Drude <sup>(1)</sup> la conduzione del calore nei metalli avviene con un doppio meccanismo. Da un canto si produce nel metallo tra le parti calde e le fredde uno scambio continuo di ioni che ha per effetto di egualizzare le temperature convettivamente come nei gas, in modo cioè che un numero eguale di ioni traversa un piano qualsiasi nei due sensi. A questo trasporto di calore non è connessa perciò alcuna manifestazione elettrica.

Contemporaneamente avrebbe origine una differenza nella concentrazione degli ioni tra i punti in cui la temperatura è differente, poichè in quasi tutti i metalli il numero di ioni per centimetro cubo è funzione della temperatura.

Ne segue una vera migrazione di ioni in un senso determinato, e se il corpo è isolato, nascono in esso delle forze elettriche che modificano la ulteriore diffusione degli ioni. A questa migrazione sarebbero dovute le deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e l'effetto Thomson; ad essa pure è dovuta la rotazione sopra riferita del disco di bismuto nel campo.

3. Supponiamo che il disco sia percorso, in un campo ad esso normale, da un flusso di calore centrifugo radiale. Dimostreremo che il disco deve equivalere a una particolare lamina magnetica con senso di circuitazione opposto a quello della corrente magnetizzante. Notiamo anzitutto che la distribuzione delle temperature, ed eventualmente del campo elettrico, nel disco continuerà per ragioni di simmetria a essere circolare. E perciò il gradiente di temperatura e la forza elettrica saranno in ogni punto radiali.

Al gradiente termico nel senso  $dr$  eguale a  $\frac{dT}{dr}$ , negativo, corrisponde per la teoria di Drude, un flusso centrifugo di ioni positivi con velocità  $-t_1 \frac{dT}{dr}$ , essendo

$$(1) \quad t_1 = p y_1 x_1$$

nella quale  $p$  è una costante  $y_1 = ev_1$  il prodotto della carica  $e$  dell'ione per la velocità che esso acquista sotto la forza 1, e  $x_1$  la variazione relativa con la temperatura del numero  $N_1$  di ioni per centimetro cubo:

$$x_1 = \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dT} = \frac{d \log N_1}{dT} .$$

Consideriamo, in un punto del disco alla distanza  $r$  dal centro, la componente radiale  $\frac{dr}{dt}$  e la componente circolare  $r \frac{d\vartheta}{dt}$  della velocità e supponiamo che la corrente magnetizzante circoli nel senso di  $\vartheta$  crescente.

(1) Drude, Ann. d. Physik, 1, pag. 566, 1900.

Ponendo

$$Hev_1 = m_1$$

avremo

$$(2) \quad r \frac{d\vartheta}{dt} = -m_1 \frac{dr}{dt}.$$

Detta  $E$  la forza elettrica radiale che prende origine per l'accumulo diseguale di ioni, e computandola positivamente nel senso centrifugo, sarà inoltre

$$(3) \quad \frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} + m_1 r \frac{d\vartheta}{dt}.$$

La (2) ci dice che la traiettoria degli ioni è la stessa spirale

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_1}}$$

già trovata per un flusso radiale *elettrico* <sup>(1)</sup>.

La (3), combinata con la (2) ci dà poi

$$(1 + m_1^2) \frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr}.$$

Trascurando, in prima approssimazione,  $m_1^2$  di fronte alla unità, la densità della corrente radiale trasportata dagli ioni positivi sarà perciò

$$I_{1,r} = N_1 e \frac{dr}{dt} = N_1 e \left( y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right).$$

Per gli ioni negativi si trova egualmente

$$I_{2,r} = -N_2 e \frac{dr}{dt} = N_2 e \left( y_2 E + t_2 \frac{dT}{dr} \right).$$

Ma essendo il disco isolato, deve essere

$$(4) \quad I_{1,r} + I_{2,r} = 0$$

e perciò

$$N_1 \left( y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right) = -N_2 \left( y_2 E + t_2 \frac{dT}{dr} \right)$$

dalla quale si ricava il valore della forza elettrica:

$$(5) \quad E = \frac{N_1 t_1 - N_2 t_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} \frac{dT}{dr}.$$

(1) Corbino, Rend. Lincei. t. XX, pag. 424, 1911.

Analogamente ponendo per gli ioni negativi

$$m_2 = H e v_2$$

si ottiene per la densità delle correnti *circolari* trasportate dagli ioni positivi e negativi

$$\begin{aligned} I_{1,c} &= N_1 e r \frac{d\vartheta}{dt} = -m_1 I_{1,r} \\ I_{2,c} &= -N_2 e r \frac{d\vartheta}{dt} = m_2 I_{2,r}. \end{aligned}$$

A questo flusso circolare di cariche corrisponderà un'azione magnetica equivalente a quella prodotta da una corrente complessiva  $i$ : e questa, per la (4) sarà data da

$$i = I_{1,c} + I_{2,c} = -(m_1 + m_2) I_{1,r} = -(m_1 + m_2) N_1 e \left( y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr} \right)$$

Tenendo presente la (5), e la (1) questa diviene

$$i = p e N_1 y_1 N_2 y_2 \frac{x_1 + x_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} (y_1 + y_2) H \frac{dT}{dr}$$

o anche essendo

$$\sigma_1 = e N_1 y_1$$

e

$$\sigma_2 = e N_2 y_2$$

i contributi delle due specie di ioni alla conducibilità elettrica totale

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

si potrà scrivere

$$(6) \quad i = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) H \frac{dT}{dr}.$$

Ma se si indica con  $Q$  la quantità totale di calore che fluisce nel disco, si avrà, computandola positivamente nel senso centrifugo,

$$Q = -k \cdot 2\pi r \frac{dT}{dr},$$

ove con  $k$  è indicata la conducibilità termica della sostanza.

Sarà perciò

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{k} \frac{Q}{2\pi r}.$$

Sostituendo nella (6) avremo dunque

$$i = -p \frac{1}{2\pi r} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k\sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) Q H$$

e perciò, ponendo

$$(7) \quad U = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k\sigma} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2),$$

il disco eserciterà un'azione elettromagnetica equivalente a quella di un sistema di correnti circolari di densità

$$(8) \quad i = -\frac{1}{2\pi r} U Q H$$

e l'azione stessa sarà, per date dimensioni del disco, proporzionale al coefficiente  $U$  caratteristico della sostanza, al flusso di calore  $Q$  e al campo  $H$ . Poichè  $x_1 + x_2$ , secondo la teoria, è una funzione comune a tutti i metalli, e da quanto è noto essa ha un valore positivo, e poichè le altre grandezze che compariscono nella espressione di  $U$  sono essenzialmente positive, ne risulta che  $i$  ha un senso opposto a quello di circuitazione della corrente magnetizzante.

4. Il disco per le sue proprietà elettromagnetiche, possiederà un'energia di posizione nel campo; per un anellino  $2\pi r \cdot dr$  essa è data da

$$dW = \frac{1}{2\pi r} U Q H dr \times \pi r^2 H.$$

L'energia totale sarà

$$W = \frac{1}{2\pi} U Q S H^2,$$

ove  $S$  indica la superficie totale attiva del disco.

Ma se la normale al disco fa un angolo  $\alpha$  con le linee di forza, la energia sarà

$$W' = W \cos^2 \alpha.$$

*Si eserciterà perciò sul disco una coppia di momento*

$$M = -\frac{dW'}{d\alpha} = W \sin 2\alpha$$

e per  $\alpha = 45^\circ$

$$M = \frac{1}{2\pi} U Q S H^2.$$

La coppia sarà perciò proporzionale al quadrato del campo  $H$ , al flusso calorifico  $Q$ , alla superficie del disco  $S$ , e dipenderà dal coefficiente  $U$  caratteristico del metallo.

Deducendo dall'esperienza il valore di  $U$  si viene così a possedere una nuova relazione indipendente dalle altre già note per la determinazione delle costanti caratteristiche di Drude. E come si vede dalla (7) il coefficiente non ha niente da fare col coefficiente

$$Q = -\frac{p}{\sigma} (\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1)$$

del fenomeno trasversale termomagnetico (effetto elettrico) di Ettingshausen e Nernst, come potrebbe sembrare a prima vista.

Osserveremo invece che si può porre la (7) sotto la forma:

$$U = p \frac{\sigma}{k} \times \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} (x_1 + x_2) \times \frac{y_1 + y_2}{\sigma} \times \sigma,$$

ora il primo fattore varia di poco per i diversi metalli; il secondo fattore è proporzionale a queste variazioni, cioè alle deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e il terzo al coefficiente  $P$  del fenomeno galvanomagnetico (effetto termico) di Ettingshausen, cioè alla differenza di temperatura trasversale che acquista una lamina percorsa nel campo da una corrente elettrica.

Cosicchè la coppia constatata nelle presenti ricerche dipende dal prodotto dello scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, del coefficiente  $P$  e della conducibilità  $\sigma$  del metallo.

Purtroppo questi tre elementi si conoscono solo per pochi metalli, e anche in modo poco sicuro; essi sono riferiti nella seguente tabella, nella quale la prima colonna dà i valori delle deviazioni  $D$  dalla legge di Wiedemann e Franz, la seconda il coefficiente  $P$ , la terza la conducibilità  $\sigma$  riferita all'argento, la quarta il loro prodotto  $P$ , in unità arbitrarie, da cui dovrebbe dipendere  $U$ .

	$D \cdot 10^6$	$P \cdot 10^6$	$\sigma$	$P$
Ag . . . . .	0	—	60	0
Cu . . . . .	22	—	56	0
Costantana . . . . .	468	—	20	0
Ni . . . . .	16	0,2	7,4	2,4
Fe . . . . .	140	0,06	8	67
Carbone . . . . .	?	5	—	?
Sb . . . . .	300	2	1,5	900
Bi . . . . .	308	50	0,8	12300

Come si vede la coppia si potrebbe manifestare solo col bismuto e con l'antimonio, e forse anche col carbone.

In realtà, servendomi della semplice disposizione indicata, non ho ottenuto alcun risultato con dischi di alluminio, di argento e di rame.

*Patologia vegetale. — Ulteriori ricerche sulla genesi del ronchet od arricciamento della vite.* Nota di E. PANTANELLI, presentata dal Socio G. CUBONI.

In una Nota precedente <sup>(1)</sup> ho accennato che le ricerche del triennio 1907-1909 avevano portato ad accertare, che si può ottenere la comparsa del ronchet anche al primo anno d'impianto, allevando talee o barbatelle sane in luoghi dove furono estirpate da poco altre viti. Inoltre da alcune esperienze in vasi ed in cassoni era risultato, che l'affievolimento dell'attività produttrice di nuove radici e il rapido deperimento delle radicelle stesse, che insieme all'alterazione della funzione assorbente hanno la parte massima tra i fattori causali interni della malattia <sup>(2)</sup>, sono provocati dall'azione di sostanze tossiche che diffondono dai frammenti di radici in lenta moria sparsi per il terreno. Le esperienze del 1910 confermano e precisano questi risultati.

Anzitutto ricordo ancora che Ruggeri <sup>(3)</sup>, Segapeli <sup>(4)</sup>, Paulsen <sup>(5)</sup>, Krasser <sup>(6)</sup> hanno osservato che piantando legno sano, specialmente di *Rupestris du Lot*, *Aramon*  $\times$  *Rupestris* G. 1, *Riparia*  $\times$  *Rupestris* 3306 e 3309, subito dopo l'estirpazione di viti malate, anche di varietà differenti, la malattia compare subito sui ripianti. In queste esperienze però erano mancate sempre le prove di controllo: si doveva ripiantare anche su vigne non affette da ronchet o nel medesimo terreno coltivato a graminacee o leguminose, altrimenti l'esistenza di un'infezione nel terreno non è provata. Nelle mie esperienze di ripianto si tenne conto di queste circostanze; e facendo uso di diversi vitigni, estirpando viti di età diversa, sane o malate, intercalando culture diverse, si sono avuti i seguenti risultati:

1) il rachitismo e specialmente la deformazione delle foglie, caratteristica per il ronchet delle *Rupestris*, colpiscono subito il legno sano piantato in terreno infettato naturalmente dai resti di radici di vite, ancora *vivi* e non invasi da micelii di rizomorfe;

2) la cultura di graminacee purga il terreno fino alla profondità a cui arriva l'influenza delle loro radici, perchè queste asciugano la terra e

(1) Rendic. Accad. Lincei (5), vol. XIX, 1910, 1<sup>o</sup> sem. pag. 395.

(2) Bull. Off. Minist. Agric. Anno 1910, serie C, fasc. 2<sup>o</sup>, pag. 8.

(3) Ibidem, anno 1903, vol. VI, pag. 2273.

(4) Citato da Schiff-Giorgini, ibidem, anno 1906, vol. VI, pag. 973.

(5) Ibidem, anno 1908, vol. III, suppl. pag. 1247.

(6) Relaz. al Congresso Internaz. Agric. Vienna, 1907, pag. 24.

fanno scomparire — per ossidazione — le sostanze nocive prodotte dall'autolisi e lento deperimento dei frammenti di radici sparse per il suolo;

3) il sovescio di leguminose aggrava invece la situazione, perchè conserva il terreno umido e permette ai micelii terricoli di continuare a vegetare, affrettando la moria dei detti residui di radice e indebolendo anche le parti sotterranee delle nuove viti ripiantate.

È da notarsi, che i fenomeni di lento deperimento dei residui radicali nel suolo non erano finora stati studiati da alcuno, e più o meno si credeva, che essi cadessero in preda ad un rapido marciume per opera di funghi, batterii, acari ecc., andando così ad arricchire il capitale humoso del terreno. Nei terreni siciliani, specialmente in quelli che si prestano come focolai di origine del ronchet, questa rapida disaggregazione colpisce solamente i residui morti, ma ciò che resta nel terreno quando si estirpano viti o barbatelle è un fitto intreccio di radici *vive* di diametro variabile, le quali generalmente si rimarginano alle estremità con un callo, talora molto sviluppato, e in queste condizioni si conservano in vita per vari anni; p. es. quattro anni dopo l'estirpazione di un barbatellaio abbiamo trovato uno strato quasi continuo di questi frammenti di radici, ancora vivi, ad una profondità di 40-60 cm. Le radici di media grossezza sono quelle che resistono meglio allo sfacelo; tuttavia anche tre anni dopo l'estirpazione di vigne o viti madri ho trovato nel sottosuolo frammenti di grosse radici ancora vive. È probabile che in paesi più settentrionali, ove il terreno sia più freddo ed umido, le radici rimaste nel suolo cadano più presto in preda alla marcescenza.

Certo è che risultati analoghi si ottengono coltivando per parecchi anni le barbatelle di vite nel medesimo posto. Nel vivaio di Noto ho avuto campo di osservare fin dal 1907, che negli appezzamenti *stanchi* del barbatellaio non solo l'attecchimento era molto scarso — fatto ben noto fin dai lavori di Oberlin (1891) — ma un certo numero di barbatelle aveva germogli rachitici, foglie piccole, deformate, irregolari nella *Berlandieri* Ress. 1 e 2, *Riparia*  $\times$  *Berlandieri* 420 A, 157-11; piccole, profondamente lacinate ed irregolari nella *Rupestris* du *Lot*, *metallica*, *Aramon*  $\times$  *Rupestris* G. 1, *Riparia* *Martineau*, *Riparia*  $\times$  *Rupestris* 3306, 3309 ecc., sebbene il materiale impiantato fosse scelto con cura: per la *Rup. du Lot* proveniva anzi dal R. Vivaio di Vittoria, ove questo vitigno è ancora tutto sano e robusto. Negli appezzamenti ove le barbatelle seguivano ad un anno di cultura a leguminose (ceci, fagioli) l'attecchimento era soddisfacente, il fogliame bene sviluppato e sano.

Questi accertamenti m'indussero a studiare nel 1908 quali relazioni passano fra la stanchezza del barbatellaio — giudicata in base alla percentuale di attecchimento — e la comparsa del ronchet su materiale sano al momento dell'impianto. P. es. da un appezzamento che per 13 anni era adibito a barbatellaio (b. stanco), si ebbe, in confronto ad appezzamenti che

nel 1907 erano stati coltivati a leguminose, la seguente raccolta di barbatelle adatte alla distribuzione, un po' inferiore all'attecchimento totale:

	barbatellaio stanco			barbatellaio riposato			rapporto riposato stanco
	piantate	raccolte	%	piantate	raccolte	%	
Rupestris du Lot . . . . .	2000	315	15,75	3000	1455	48,54	3,07
" metallica . . . . .	4000	1124	28,09	(64000)	(37835)	(59,20)	2,11
Riparia Gloire. . . . .	"	1383	34,57	10250	6595	63,44	1,86
" $\times$ Rup. 3309 . . . . .	"	2074	51,85	(59200)	(38974)	(57,38)	2,11
Aramon $\times$ Rup. G. 1 . . . . .	"	844	21,10	10250	6754	65,91	3,12
Berlandieri Ress. 2 . . . . .	"	437	10,92	"	3324	32,43	2,97
Riparia $\times$ Berland. 402 A . . . . .	"	250	6,25	"	5421	52,89	8,47
Rupestris $\times$ Berland. 1737 . . . . .	"	963	24,07	"	6694	65,31	2,71
Vinifera (Calabrese) . . . . .	100	85	85	100	96	96	1,11

Nessuna barbatella contrasse il ronchet nel terreno riposato, mentre nel terreno stanco si ebbe:

	piantate	raccolte	%	sane	malate	%
Rup. du Lot . . . . .	2000	315	15,75	240	75	23,81
" metallica . . . . .	4000	1124	28,09	1090	34	3,03
Rip. Gloire. . . . .	"	1383	34,57	1368	15	1,08
" $\times$ Rup. 3309 . . . . .	"	2074	51,85	2041	33	1,33
Aramon $\times$ Rup. G. 1 . . . . .	"	844	21,10	776	68	8,06
Berlandieri Ress. 2 . . . . .	"	437	10,92	433	4	0,92
Rip. $\times$ Berl. 420 A . . . . .	"	250	6,25	247	3	1,20
Rup. $\times$ Berl. 1737 . . . . .	"	963	24,07	916	37	3,88
Vinifera (Calabrese) . . . . .	100	85	85	85	0	0

Non vi è relazione netta con la percentuale di attecchimento, che del resto, come abbiamo veduto, è in tali condizioni ben diversa da quella che si ha in terreno riposato. La *Rup. du Lot* è il vitigno che più facilmente contrae il ronchet in terreno stanco; segue poi a gran distanza l'*Aramon  $\times$  Rupestris* G. 1, il 1737, la *Rup. metallica*. La recettività è massima nelle *Rupestris*, la *Riparia* è molto sensibile, ancora meno la *Berlandieri*; la *Vinifera (Calabrese)* si dimostra insensibile.

Piantando talee malate di ronchet in terreno riposato, si ha una percentuale di barbatelle risanate più o meno elevata a seconda dei vitigni,

mentre in terreno stanco la ripresa ed il risanamento sono irrigorì. Nel 1908 si ebbe:

	barbatellaio stanco				barbatellaio riposo			
	talee piantate	barbatelle raccolte			talee piantate	barbatelle raccolte		
		sane	risanate	malate		sane	risanate	malate
Rup. du Lot . . .	2000	0	395	276	1000	48	213	126
" metallica . .	1000	45	229	136	"	86	294	48
Rip. Gloire. . . .	" 40	239	143	"	123	338	27	
" $\times$ Rup. 3309 .	" 65	194	115	"	158	282	36	
Aramon $\times$ Rup. G. 1	" 72	234	179	"	163	396	62	
Berlandieri Ress. 1 .	" 0	0	10	"	20	39	13	
" " 2 .	" 3	44	42	"	37	129	17	
Rip. $\times$ Berl. 420 A .	" 0	18	27	"	49	246	20	
Rup. $\times$ Berl. 1737 .	800	22	108	124	"	73	348	42

Dei risultati ottenuti intercalando culture erbacee ho già parlato nella precedente Nota.

\* \* \*

In base a queste esperienze ed allo studio delle alterazioni del sistema assorbente fui tentato anzitutto a credere, che la malattia fosse dovuta ad un'infezione delle radici da parte di qualche microrganismo terricolo. È un fatto che la *Dematophora* (o diverse forme di *Rhizoctonia*) sono frequenti nelle *Rupestris*, nel *Salonis*, nella *Berlandieri*, in quei terreni che per le loro proprietà di struttura e giacitura si prestano come focolari di origine del ronchet, ma in esperienze che eseguì nel 1910 allevando talee sane di *Rup. du Lot* in presenza di radici infette da talune di queste forme di rizomorfe, o da un batterio che si trova spesso nei vasi delle estremità radicali delle viti malate, non ottenni la riproduzione della malattia, sebbene l'atteccchimento e lo sviluppo fossero sfavorevolmente influenzati.

Invece ho ottenuto risultati incoraggianti quanto alla natura dell'infezione del terreno, ricorrendo a terre e radici sterilizzate in vario modo. In tutte queste esperienze del 1910, che furono al solito eseguite nel R. Vivaio di Noto, feci uso esclusivamente di barbatelle sane o malate di *Rup. du Lot*, controllate con cura nella precedente vegetazione. Nelle condizioni di allevamento che sto per indicare, si ottenne la comparsa di ronchet tipico (prezzemolatura della foglia) su gli ultimi germogli, complicato da un leggero rachitismo.

Il massimo effetto patogeno si ebbe allevando il legno sano in terra scavata fra le radici delle viti malate, e addizionata di  $\frac{1}{10}$  del suo peso di frammenti *vivi* delle radici stesse, non infetti — almeno all'inizio dell'esperienza — da rizomorfe. Un minore effetto patogeno si ebbe nella terra + malata + addizionata della stessa proporzione di frammenti vivi di radici di viti sane. Ma anche nella terra malata senza addizione di radici si ebbe

un'infezione maggiore che nella terra « sana », per quanto questa fosse ad-  
dizionata di pezzi di radici malate; la terra sana per se stessa non ebbe  
azione patogena.

Questi risultati mostrano che la terra malata si comporta come se fosse  
impregnata di sostanze tossiche, giacchè non si può invocare l'infezione di-  
retta delle radici delle barbatelle da parte di rizomorfe, che avvenne solo  
in qualche caso in forma assai blanda. Quanto alla provenienza delle so-  
stanze nocive, osserviamo che non si ebbe alcuna infezione aggiungendo alla  
terra sana, che per sè stessa è innocua, la stessa proporzione di frammenti  
di radici scottati per 10' in acqua bollente o sterilizzati anche internamente  
con lisolo al 2 %, sebbene durante il corso dell'esperienza essi venissero  
invasi da *Dematophora* ed altri micelii terricoli.

La sterilizzazione della terra a secco, elevando la temperatura a 180-  
200°, la rese meno adatta all'atteccimento delle barbatelle, ma bastò per  
togliere le proprietà patogene alla terra malata, anche se conteneva fram-  
menti vivi di radici.

L'essiccamiento della terra malata, priva di residui di radici, alla luce  
diretta del sole le tolse l'azione patogena, mentre l'impregnazione della terra  
e frammenti di radici con lisolo al 2 % non impedì l'infezione.

Da questi fatti si può dedurre che l'agente patogeno è di natura o di  
provenienza biologica, ma non è un batterio sporulato, né un micete a spore  
molto resistenti, perchè perisce per l'azione diretta dei raggi solari e del  
lisolo al 2 %; non può essere neppure un batterio non sporulato, né un mi-  
celio sterile od a spore delicate, perchè resiste al lisolo al 2 %, in cui  
periscono i batterii asporigeni ed i micelii, p. es. quelli delle rizomorfe.  
Quindi si deve trattare di un veleno solubile che, emanando dai residui di  
radice, si diffonde nella terra.

L'origine di questa sostanza nociva è enzimatica, perchè non si forma  
nelle radici cotte o sterilizzate anche internamente con lisolo al 2 %, mentre  
si forma anche in radici sterilizzate con lisolo al 2 %. Essa si origina nei  
processi citolitici delle radici morenti, anche se immuni da *Dematophora*  
od altre rizomorfe, per cui può essere considerata come un prodotto autoli-  
tico delle radici di vite. Tuttavia pare che l'infezione con micelii ne affretti  
enormemente la produzione, e resta a stabilirsi se qualche forma di rizo-  
morfa o di altri microrganismi radicicoli non possa secernere sostanze di  
simile azione nociva.

Quanto alla natura di questa sostanza tossica, gli esperimenti del 1910  
tendono ad escludere che sia un veleno fisso (acido, base aminica, alcaloide),  
perchè non solo è distruggibile nella terra col calor secco, ma anche per  
insolazione, ossidazione, essiccamiento. In complesso mi pare più probabile  
che esso appartenga al gruppo delle tossine di carattere enzimatico, e ciò si  
accorderebbe anche col risultato negativo delle prove di estrarlo con acqua

dalla terra malata, la quale era molto ricca di materiale colloide e quindi lo riteneva per assorbimento.

A parte la natura della sostanza in questione, che cercherò di stabilire con ulteriori esperienze, è certo che la sua azione più saliente consiste nel paralizzare l'attività rizogena e nell'arrestare l'accrescimento delle radicelle, e che in relazione con questi disturbi delle radici compare la deformazione caratteristica sui tralci. Resta a sapersi qual parte essa abbia nella deformazione delle estremità radicali, la quale avviene anche in terre non infette o sterilizzate, che abbiano una determinata struttura, come ho detto in precedenti comunicazioni; e se essa venga assorbita dalle radici o attivamente, o passivamente attraverso le estremità radicali deperite o marcite, e spedita al fusto influenzando direttamente le gemme.

\* \* \*

Relazioni interessanti passano fra l'infezione e la natura del suolo.

Ho detto più volte, che la terra « malata » nei focolari di origine del ronchet è caratterizzata dalla sua struttura fisica, essendo eminentemente compatta, ricca di materiali colloidali, quindi capace di trattenere una notevole umidità anche durante la stagione arida, poco aereata, specialmente nella stagione umida, e dalla sua giacitura sopra un fondo impermeabile di marna o di calcare, o permeabile ma molto umido, p. es. sopra un banco di sabbia umida.

Alcune prove fatte fra il 1908 e il 1910 hanno mostrato che la terra molto argillosa (prelevata tra viti malate, ma sterilizzata) non solo assorbe la sostanza tossica, ma la trattiene tenacemente in uno stato attivo anche se si secca, mentre nella sabbia la sostanza in questione non viene assorbita, e se vi è tenuta a forza perde la sua attività col disseccamento. Questa inattivazione è probabilmente dovuta ad ossidazione; 1) perchè l'aria penetra facilmente fra le più minute particelle nella sabbia secca, mentre la terra argillosa asciugandosi si contrae in zolle e grumi compatti e di difficile aereazione; 2) perchè la tossina, non essendo assorbita dentro le particelle (colloidali), rimane alla superficie delle particelle di sabbia. Infatti nella terra sana più povera di costituenti colloidali e più ricca di sabbia che la terra malata, l'assorbimento essendo minore e l'aereazione maggiore, la tossina tende a scomparire.

Un elevato contenuto di calcare facilita l'ossidazione della sostanza tossica per l'alcalinità che esso conferisce al liquido del terreno. Troviamo, infatti, il ronchet negli occhi di terreno dove il calcare diminuisce a favore della materia argillosa, e le concimazioni acide, solfato ferroso, ammonico, sovescio, favoriscono il ronchet.

La sostanza tossica è dilavata facilmente dal terreno sabbioso, non si può asportare affatto dal terreno argilloso; essa permane tuttavia nei terreni

sabbiosi se non hanno scolo, o se per speciali condizioni del fondo si conservano abbastanza umidi anche in estate.

Queste relazioni fra la natura del suolo e della sostanza tossica spiegano i fenomeni del risanamento estivo delle viti malate e della ripartizione del ronchet nelle vigne a seconda della struttura e giacitura del terreno.

Naturalmente, siccome la malattia è dovuta ad un'infezione nel suolo, possono trovarsi focolari di origine in terre che non possiedono tali proprietà, e viceversa interi vigneti innestati su vitigni sensibili possono sussistere ancora sani in terreni che presentano le qualità favorevoli allo sviluppo del ronchet. In questi casi la spiegazione è data dalla storia del terreno prima dell'impianto della vigna. È chiaro, che là dove era vigna, fosse pur nostrale, peggio se americana, la *Rupestris* o altri vitigni sensibili rapidamente contraggono la malattia, ed alcune osservazioni fatte in Sicilia ed in Puglie m'inducono a ritenere che anche l'estirpazione di oliveti, mandorleti, querceti ecc. lasci nel terreno un'infezione, dovuta ai residui radicali, capace di produrre ronchet nelle viti impiantate subito dopo. Questo punto merita di esser chiarito con apposite esperienze, tanto più che è noto *ab antiquo* che la vite soffre in vicinanza degli alberi da frutto, e Viala <sup>(1)</sup> narra che le *Rupestris* scompaiono in vicinanza di qualsiasi vegetazione arborescente, anche di cespugli.

La diversa sensibilità dei singoli vitigni dipende quindi non solo dalla correlazione fra lo sviluppo dei germogli e la potenzialità del sistema assorbente, quindi fra l'epoca e vigoria del germogliamento e lo stato delle radicelle, dalla delicatezza dell'apparato radicale riguardo all'aereazione ed alla umidità del terreno, ma anche e soprattutto dalla recettività specifica di fronte alla sostanza tossica che infetta il suolo. Per selezionare un vitigno resistente al ronchet occorre dunque piantare legno *sano* in terreno infetto; e, siccome la sostanza nociva si conserva solamente in terre ricche di materiali colloidali o finissimi o privi di sfogo, occorrerà che il terreno adempia a queste condizioni.

L'esperienza di selezione si può quindi fare in tre modi:

*a)* estirpando viti, meglio se malate, e di *Rupestris*, e ripiantando subito legno *sano* dei diversi vitigni senza intercalare alcuna cultura, come si è fatto e si ripete anche quest'anno nel vivaio di Noto;

*b)* senza estirpare viti malate, piantando talee o barbatelle sane negli interfilari, come fu fatto involontariamente nell'impianto di parecchi vivai, p. es. di quello di Marsala <sup>(2)</sup>. Con questo sistema abbiamo attualmente istituito un'esperienza con parecchi vitigni nelle parcelle più colpite del vivaio di Noto;

(<sup>1</sup>) *Une mission viticole en Amerique*, 1889, pag. 79-80.

(<sup>2</sup>) Liuzzi, in Bull. Off. Minist. Agric., anno 1908, vol. III, suppl. pag. 1273.

c) in cassoni od ajole foderate di cemento, che si riempiono di terra malata, o di struttura analoga a quella malata, mescolata ad una forte quantità, circa  $\frac{1}{10}$  del peso, di frammenti vivi di radici di vite.

\* \* \*

Le esperienze qui riferite dimostrano che le materie patogene provengono dai frammenti di radici in lenta moria, vive al principio dell'esperienza, quindi non escludono che anche le radici ancora attaccate alla vite non possono secernere sostanze tossiche per la vite stessa o per le viti circostanti. È un lato nuovo del problema, che spero di poter illuminare con ulteriori ricerche; ma dal momento che si può ottenere il ronchet allevando la vite in terra infettata da residui di radici della vite stessa, anche immune da ronchet, non vedo perchè non si possa considerare il ronchet come una degenerazione conseguente ad una forma fin qui ignorata di stanchezza del terreno, resa talmente grave, da produrre deformazioni così caratteristiche nei germogli, sia dalla speciale sensibilità di determinati vitigni — la quale esiste realmente — sia dalla *natura specifica* delle sostanze nocive che in determinate condizioni si formano nei tessuti radicali e si diffondono per il terreno.

La stanchezza del terreno per una determinata pianta è da attribuirsi in generale all'accumulo di sostanze nocive nel terreno, quando non sia prodotta da esaurimento di principi nutritizi o dall'eccessivo sviluppo di parassiti vegetali od animali nel suolo. Dove mancano questi due fattori di stanchezza — come nel ronchet — occorre stabilire caso per caso la provenienza e la natura delle sostanze nocive, se queste siano prodotte dalle radici vive ancora attaccate alla pianta, o di radici morenti o staccate, o da microrganismi che pullulino in queste o nel terreno.

Da una parte è noto, grazie a ricerche compiute in questi ultimi anni, che le radici di piante superiori lasciano sfuggire, quando ancora sono in condizioni normali, composti di azoto, potassio, calcio, magnesio (Wilfarth, Rømer e Wimmer (1907-1908), Truffaut (1908), Niklewski 1909); inoltre enzimi, come ossidasi, invertasi, amilasi (Molisch 1888, Laurent 1906, Schreiner e Reed (1909), Dachnowski (1909), Sullivan (1909), Brock-Rousseau e Gain (1910).

In questi ultimi tempi Jensen (1907), Pickering (1907), Fletcher (1908), Dandeno (1909), Watton (1910) hanno portato numerosi esempi di piante della stessa specie o di specie diverse che si danno noia o si favoriscono nel campo. A parte i casi in cui si tratta di concorrenza per un determinato alimento, o di eccessiva acidità nel suolo, come a Rothamsted secondo Hall e Gimingham (1908), o dall'accumularsi di composti alcalini, come nella stanchezza per l'avena studiata da Sjollema e Hudig (1908), o di protozoi che divorano i batterii nitrificanti, come a Rothamsted secondo Russell e Hutchinson (1910), è doveroso ricordare che i primi studi sopra la stan-

chezza dovuta a sostanze nocive di origine biologica si debbono ad A. Koch (1899), il quale osservò che aggiungendo un po' di terreno « stanco » di vigna o il suo estratto acquoso si rende « stanco » per la vite anche un terreno normale. La sterilizzazione guarì la terra « stanca ». Si trattava dunque probabilmente di microrganismi nocivi.

Pouget e Chouchak (1907), Hiltner (1907), Hall (1908), Schreiner e Sullivan (1909) hanno mostrato che la stanchezza per la medica ed il trifoglio è dovuta all'accumularsi di sostanze tossiche distruggibili con la coltura. Livingston (1907), Fletcher (1908), Dachnowski (1909-1910), hanno fatto osservazioni analoghe per una quantità di culture diverse, senza riuscire a precisare la natura o la provenienza delle sostanze nocive. Invece Schreiner ed i suoi collaboratori Reed, Sullivan e Skinner (1908-1910), partendo dallo studio delle escrezioni delle radici normali elevate in assenza di microrganismi, hanno potuto stabilire che ogni pianta lascia sfuggire prodotti determinati, più dannosi ad essa ed a piante della stessa specie che ad altre specie, e finora hanno potuto isolare: acido picolincarbossilico, diidrossistearico, agrocerico; agrosterolo, agrosterina. Sono sostanze che si ossidano facilmente perdendo la loro attività e il più dannoso al frumento è l'acido diidrossistearico secreto dal frumento stesso.

Più importanti per noi sono le osservazioni fatte da Loew a Portorico (1910). In quell'isola le piantagioni di zucchero, ananasso e caffè soffrono di una malattia singolare, analoga al *mosaico* del tabacco, con deformazione e maculatura delle foglie, nanismo degli internodi. I terreni sembrano eccellenti, sono ricchi di alimenti, le concimazioni non giovano; ma vi si sviluppano in grande quantità fermenti butirrici anaerobi, i quali si nutrono dei frammenti di radici che restano ogni anno nel terreno e avvelenano le nuove piantine con le loro escrezioni. Se aggiungiamo che il mosaico del tabacco secondo Splendore è dovuto ad arresto dell'accrescimento radicale e che secondo Charlan (1910) si cura efficacemente disinfeettando il suolo con vapore o con formalina, concludiamo che il ronchet della vite non è più unico nel suo genere, ma bensì rappresenta una classe di malattie dovute ad intossicazione del suolo.

**Agronomia. — Sulla presunta perpetuazione delle specie infeste attraverso lo stallatico.** Nota del prof. O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Le sementi possono giungere al cumulo di letame per diverse vie:

*a)* con le spazzature o il fiorume, o le pule, ecc., direttamente, cioè senza prima passare per la stalla e senza permanere nella vasca di colaticci (maceratoio) annessa alle concimaie; *b)* con gli stessi materiali di scarto, mantenuti prima per un certo periodo di tempo (ordinariamente una quindicina di giorni) in maceratoio; *c)* con la lettiera rimasta temporaneamente sotto i piedi degli animali, e trasportata immediatamente dopo sul cumulo; *d)* con la lettiera che, innanzi d'essere portata in concimaia, fu lasciata temporaneamente nel maceratoio; *e)* con deiezioni unitesi al materiale che serve di lettiera.

In ogni caso, il cumulo di stallatico può venire successivamente non curato, oppure curato con innaffiature periodiche, spandimento di materiali polverulenti, ecc. Il letame può essere infine trasportato nei campi sei mesi circa dopo la sua deposizione in concimaia (sistema più comune), oppure dopo un anno circa. Non basta: al letame possono affluire, per una stessa specie, sementi vecchie e fresche e quindi di vario grado di resistenza.

Nella presente Nota riporto i risultati sommari delle mie osservazioni che ho cercato di estendere, se non a tutte, alle più essenziali delle forme accennate, e con le sementi di un numero molto maggiore di specie di quelle di cui mi servii per le prove destinate a determinare l'influenza, sulla vitalità dei semi, del passaggio attraverso l'organismo degli animali domestici: evidentemente al letame, per via diretta e indiretta, pervengono sementi di variatissime specie che gli animali normalmente non ingeriscono.

#### ELENCO DELLE SPECIE SOTTOPOSTE AD ESPERIMENTO.

*Vicia segetalis* Thuill., del 1906, 1907, 1908, 1909; *Vicia hirta* Balb., del 1908 e 1909; *Lathyrus Aphaca* L., del 1906, 1908 e 1909; *Avena fatua* L., semi grossi e semi piccoli del 1907, 1908 e 1909, semi piccolissimi del 1909; *Sorghum halepense* Pers., del 1907 e 1909; *Rapistrum rugosum* (L.) All., del 1907 e 1908; *Myagrum perfoliatum* L., del 1909; *Rumex crispus* L., del 1906, 1907 e 1909; *Sinapis arvensis* L., del 1907 e 1908; *Galium Aparine* L., del 1905 e 1909; *Convolvulus sepium* L., del 1905, 1908 e 1909; *Cirsium arvense* Scop., del 1908 e 1909; *Solanum nigrum* L., del 1908 e 1909; *Daucus Carota* L., del 1908 e 1909; *Ranun-*

*culus acer*. L., del 1909; *Plantago lanceolata* L., del 1907, 1908 e 1909; *Papaver Rhoeas* L., del 1906, 1907, 1908 e 1909; *Amaranthus retroflexus* L., del 1907, 1908 e 1909; *Capsella Bursa-pastoris* Moench., del 1909; *Abutilon Avicennae* Gaertn., del 1908 e 1909; *Sonchus oleraceus* L., del 1908; *Datura stramonium* L., del 1908 e 1909; *Frumento*, del 1909; *Granoturco*, del 1909.

La quantità di semi impiegati variò da 250-500 per i più voluminosi (*Vicia hirta*; *Convolvulus sepium*, ecc.) a 1000 per i semi medi (*Vicia segetalis*, *Datura stramonium*, ecc.) e 3-4 mila per semi piccoli (*Amaranthus*, *Capsella*, *Papaver*, ecc.).

#### IMPOSTAZIONE DELLE PROVE.

Cercai di avvicinarmi il più possibile al piano completo di indagini più sopra abbozzato, servendomi da un lato di una concimaia senza platea impermeabile e senza maceratoio, del sig. Giuseppe Vincenzetti di Cantonazzo, dall'altro di una concimaia a maceratoio e a platea cementata di una delle tenute della Agenzia Co: Papadopoli di Loreo.

Nelle stesse località, contemporaneamente, conducevo a termine parte delle prove di passaggio di semi attraverso il tubo digerente dei bovini, per poter mettere, nel medesimo cumulo delle rispettive concimaie e nelle stesse condizioni, le sementi eventualmente passate integre nelle deiezioni degli animali in esperimento.

*Collocamento dei semi in maceratoio.* — Le sementi delle specie sopra elencate, provenienti da annate varie, furono poste, a gruppi (perchè non potevano ingenerarsi confusioni o incertezze), in sacchetti di garza, in due serie: una delle serie doveva servire per un'immediata constatazione dell'influenza, sulla vitalità dell'embrione, della permanenza delle sementi nei colaticci; i semi dell'altra serie dovevano essere posti nel cumulo di letame accanto agli altri delle altre serie.

*Collocamento dei semi in concimaia.* — Il problema si presentava piuttosto difficile per mettere le sementi nelle condizioni più naturali e aver poi modo di ricuperare, con assoluta certezza, i vari aggruppamenti. Ho escluso senz'altro il sistema, già adottato da altri sperimentatori (¹), di porre i semi in sacchetti di tela metallica (di rame), in quanto si va a formare un diaframma che sottrae i semi stessi all'assoluto diretto contatto del materiale organico decomponentesi. Ho preferito di collocare i diversi gruppi di sementi in altrettanti sacchetti di garza assai sottile e rada, la quale si sarebbe rapidissimamente disfatta, lasciando i gruppi nettamente divisi. In altre prove di controllo le sementi furono frammischiate a deiezioni fresche, ciò che per-

(¹) Confrontisi, ad esempio, con *The effect of digestion and fermentation of manure on the vitality of seeds*, di E. I. Oswald. Maryland.

metteva di avvicinarsi ancora più a quanto si verifica nelle condizioni normali. Scelta una porzione di alcuni metri quadrati di un cumulo in formazione a circa un metro di altezza. e appianatane, senza calpestamento. la superficie, i sacchetti vennero posti gli uni presso gli altri. sufficientemente distanziati, accanto alle deiezioni degli animali in esperimento. Subito dopo vi si sovrappose un piccolo strato di stallatico fresco per continuare. nel periodo successivo, ad innalzare uniformemente il cumulo sino a circa due metri. Le superficie occupate dai gruppi di semi vennero in ogni caso individuate agli angoli da spranghe infisse nel cumulo, e. sopra e sotto, a una certa distanza, da fili metallici incrociantisi, in modo da potere. non ostante l'inevitabile ulteriore abbassamento della massa. ritrovare senza difficoltà il punto preciso e operare con la necessaria oculatezza allo scopo di evitare scambi ed errori. L'ubicazione dei singoli lotti veniva fissata in appositi schizzi.

*Collocamento delle deiezioni degli animali in prova.* — Le deiezioni, che non avevano servito per l'esame destinato a determinare l'approssimativa percentuale dei semi passati inutilizzati attraverso l'organismo degli animali in esperimento, venivano divise in due parti e racchiuse in altrettante gabbie metalliche a maglia molto rada (8 cm. circa) e pieghevole: le une eran subito poste. come ho detto. presso i gruppi dei semi; le altre gabbie venivano prima lasciate per una quindicina di giorni in maceratoio e poi poste. a loro volta, accanto alle prime.

#### INFLUENZA DI UNA TEMPORANEA PERMANENZA IN MACERATOIO.

La doppia serie di gruppi fu immersa nel liquido il 16 agosto 1909 e ne venne tolta il 29 agosto.

La temperatura dei colaticci nella vasca. determinata giornalmente — con esatto termometro da silos — dall'agente sig. Giuseppe Padovani, oscillò, nella quindicina, da un minimo di 22 gradi centigradi il 20 agosto, a un massimo di 25 gradi il giorno 24. La permanenza dei semi in condizioni favorevoli per germinare durò dal 1º settembre 1909 a tutto dicembre 1910. vale a dire 16 mesi continui. Fatto, negli ultimi giorni del 1910, l'esame delle sementi, si ebbero i seguenti risultati:

*Avena fatua* L., semi grossi, medi e piccoli; *Sinapis arvensis* L.; *Rapistrum rugosum* (L.) All.; *Galium Aparine* L.; *Cirsium arvense* L.; *Daucus Carota* L.; *Rumex Crispus* L.; *Solanum nigrum* L.; *Ranunculus acer* L.; *Frumento*: (germinati zero %; disfatti 100 %).

*Lathyrus Aphaca* L., del 1906, germinati 26 %; del 1908, germinati 70 %; del 1909, germinati 65 %. *Vicia segetalis* Thuill.. del 1906, germinati 19 %; del 1909, germinati 78 %. *Vicia hirta* Balb., del 1908, germinati 40 %; del 1909, germinati 58 %.

*Convolvulus sepium* L., del 1905, germinati 5 %; del 1908, 30 %; del 1909, 23 %. *Abutilon Avicennae* Gaertn., del 1908, germinati 16 %; del 1909, 18 %. *Datura stramonium* L., germinati 30 % e mantenutisi apparentemente vitali 60 %.

INFLUENZA DELLA PERMANENZA PER SEI MESI IN CONCIMAIA  
SENZA PLATEA IMPERMEABILE.

Nella concimaia del sig. Giuseppe Vicenzetti furono poste due serie di semi in due tempi successivi, e precisamente il 21 luglio e il 23 agosto 1909. La distanza di un mese da un collocamento all'altro fu imposta dalla necessità di attendere il periodo di naturale maturazione dei semi della seconda serie nell'anno stesso, sempre con la precisa finalità di determinare il coefficiente di resistenza dei semi di una data specie a norma della loro età.

Per ambedue le serie l'escavo dei semi fu fatto il 17 gennaio 1910, e cioè sei mesi dopo per la prima serie e cinque mesi per la seconda. L'esame dei numerosi gruppi, diligentemente compiuto dal mio egregio assistente dott. T. V. Zapparoli, portò alle seguenti constatazioni riassuntive:

*Avena fatua* L.; *Papaver Rhoeas* L.; *Capsella Bursa-pastoris* Moench.; *Rumex crispus* L.; *Rapistrum rugosum* (L.) All.; *Cirsium arvense* L.; *Amaranthus retroflexus* L.; *Plantago lanceolata* L.; *Daucus Carota* L.; *Solanum nigrum* L.; *Myagrum perfoliatum* L.; *Galium Aparine* L.: pochissimi apparentemente ben conservati, ma mostratisi più tardi del tutto ingerminabili.

*Abutilon Avicennae* Gaertn.; *Datura Stramonium* L.: moltissimi (circa il 40 %) si mostrano duri e in apparenza vitali, ma nessuno, dopo un anno di permanenza in germinatoio, si evolve. Questi semi si conservano per ulteriori osservazioni.

*Vicia hirta* Balb., del 1908 e 1909: totalmente distrutti i semi del 1908; di quelli del 1909, 12 si presentano apparentemente vitali; in un anno, 3 germinano, 2 marcescono e 7 si conservano duri.

*Vicia segetalis* Thuill., del 1906, 1908 e 1909: su 1000 semi del 1906, trovati duri 1; del 1908, duri 4; del 1900, duri 54.

*Lathyrus Aphaca* L., semi del 1907, 1908 e 1909: su 1000 del 1907, duri 4; su 1000 del 1908, duri 22; su 1000 del 1909, duri 70.

*Convolvulus sepium* L., semi del 1906, 1908 e 1909: comportamento analogo ai semi di leguminose.

Le deiezioni degli animali che avevano servito per determinare l'influenza del passaggio attraverso l'apparato digestivo sulla vitalità delle semi, rimaste pure sei mesi in concimaia ed esaminate contemporaneamente ai gruppi di semi di cui abbiamo ora parlato, contenevano qualche raro seme, in condizioni tali da doverne presumere distrutta la vitalità. Dette deiezioni

non erano ancora ridotte al vero stato di burro nero. Le quattro gabbie di fil di ferro a larga maglia, che le contenevano, furono sotterrate, quasi a metterle nelle condizioni naturali per interramento con l'aratro, ed ivi lasciate per sette mesi. Allorchè si procedette al nuovo esame, non si trovò più nessuna traccia di semi.

#### PERMANENZA IN CONCIMAIA RAZIONALE PER UNDICI MESI.

Il giorno 30 agosto 1909, in un cumulo in formazione di una grande concimaia a maceratoio del tenimento *Negarise* (Co: Papadopoli), furono collocate: a) le sementi che erano rimaste per 15 giorni in maceratorio; b) le sementi passate inutilizzate attraverso l'organismo dei bovini; c) altrettanti gruppi di semi normali.

Un'altra doppia serie (serie *a*, e serie *d*) di semi normali venne collocata nella stessa concimaia, in un cumulo adiacente in formazione, il 3 settembre.

I semi della serie *a*, furono posti accanto a quelli della serie *d*, ma a distanza tale da poter esaminare il primo aggruppamento indipendentemente dal secondo: era, infatti, mia intenzione di mettere allo scoperto una delle due serie dopo sei mesi e l'altra dopo 12 mesi. Senonchè, non avendo potuto compiere parte delle osservazioni dopo sei mesi, tutti gli aggruppamenti furono presi in esame trascorso un periodo di quasi un anno, e precisamente il giorno 20 luglio 1910.

*Tutte le semei, di qualunque specie e di ogni età, erano già manifestamente distrutte: qualche seme di rucola, di convolvolo, di *Abutilon* e di sicalanino conservava ancora una certa parvenza di vitalità, ma si disfaceva alla minima pressione.*

#### CONCLUSIONI.

I. Già dopo circa sei mesi, in un cumulo di stallaticeo, anche se conservato senza soverchie cure e quindi non ancora ben decomposto o ridotto allo stato di materia nera, le sementi della grande maggioranza delle comuni piante spontanee e coltivate si presentano più o meno profondamente alterate.

II. Completamente distrutti, fra le specie più infeste della bassa Valle del Po, sono i semi di *Avena sativa* L.; *Rapistrum rugosum* (L.) All.; *Rumex crispus* L.; *Sinapis arvensis* L.; *Plantago lanceolata* L.; *Papaver Rhoeas* L.; *Cirsium arvense* L.; *Sonchus oleraceus* L.; *Daucus Carota* L.; *Amaranthus retroflexus* L.; *Galium Aparine* L.; *Myagrum perfoliatum* L.; *Ranunculus acer* L.; *Plantago major* L.: cioè semi non duri o a tegumento permeabile. Questi semi possono, in certe condizioni, perdere la loro vitalità persino con una relativa breve permanenza (15-20 giorni) in una vasca di colaticci.

III. Le sementi di leguminose si comportano assai diversamente secondo la loro età: quelle vecchie (di due o più anni) che hanno in gran parte perduto della loro facoltà di non lasciarsi attraversare dall'acqua, e quindi più o meno facilmente inturgidentisi e facilmente germinabili (<sup>1</sup>), si alterano incomparabilmente più presto delle sementi nuove (dell'annata) della medesima specie. Nel caso delle tre specie più tipiche da me prese in esame, il comportamento dei semi di tre annate diverse appare da queste cifre comparative:

Trovati duri dopo sei mesi su mille semi				
	del 1906	del 1907	del 1908	del 1909
<i>Vicia segetalis</i>	1	—	4	54 dei quali metà germinati
<i>Vicia hirta</i>	—	—	—	12 "
<i>Lathyrus Aphaca</i>	—	4	22	70 dei quali $\frac{1}{4}$ germinati

Probabilmente, anche i semi del 1909, se invece di essere aggruppati si fossero trovati isolati nell'ammasso (<sup>2</sup>), avrebbero resistito ancora meno, onde è a presumersi che nelle condizioni normali, il numero dei semi duruscenti incolumi da così dura prova, si riduca a proporzioni praticamente trascurabili.

IV. In modo analogo si sono comportati i semi di *Convolvulus sepium* L.

V. I semi delle due specie: *Abutilon Avicennae* Gaertn., e *Datura Stramonium* L., hanno offerto una apparente resistenza delle più prodigiose. Dopo sei mesi non meno del 40 % avevano l'aspetto di semi del tutto normali: senonchè, posti in germinatoio, si conservarono in grandissima maggioranza integri per un anno, senza evolversi.

VI. Se poi l'ammasso di stallatico, per una più prolungata permanenza in concimaia (sino a 11-12 mesi), giunge a trasformarsi completamente in materia nera (burro nero), tutte le sementi, di qualunque specie e di qualunque età, possono ritenersi disfatte e in ogni caso ingerinabili.

Nel loro complesso le mie osservazioni mi permettono di concludere che lo stallatico — sia per la elevata temperatura che nell'ammasso si conserva lungamente in conseguenza della successiva uniforme sovrapposizione di nuova materia organica a intensa facoltà fermentativa, sia per l'azione diretta dei microrganismi attaccanti la cellulosa e composti similari — è, contraria-

(<sup>1</sup>) Un seme che abbia la facoltà di germinare prontamente deve, *a priori*, ritenersi più soggetto ad alterazioni, cioè un organismo più delicato e più debole di un seme duro o non prontamente germinabile.

(<sup>2</sup>) Per quanto si sia cercato di avvicinarsi il più possibile alle condizioni naturali, l'aduggiamento di vari semi di una stessa specie doveva, sia pure in minima parte, proteggere quelli meno a contatto con l'ammasso fermentante.

riamente all'opinione in generale accettata, un potente distruggitore di semi, un grande crogiuolo, un provido purificatore.

Anche se lo stallatico si porta nei campi ad uno stato di non perfetta decomposizione, la quantità di sementi vitali che esso può contenere è così ridotta da far considerare affatto male apposta la colpa che i pratici si credono in diritto di riversargli quale efficente veicolo di semi di erbacee.

Mi riserbo di studiare il meccanismo che presiede a codesta sopraffazione di vitalità e di determinare il momento nel quale lo stallatico debba già ritenersi una vera necropoli di semi di piante infeste, e se vi siano ancora dei mezzi per affrettarne l'opera purificatrice.

Debbo rivolgere espressioni di gratitudine all'on. Ministero di agricoltura, che si compiacque di concedermi un sussidio perchè conducessi a termine le mie osservazioni, ai sigg. dottori A. Piva e B. Lusiani, G. Padovani e G. Vicenzetti che vollero meco cooperare a che le varie prove si compissero nella forma più rigorosa, e al dott. T. V. Zaparoli che mi coadiuvò efficacemente in tutte le indagini supplementari.

**Patologia. — *Sull'identità delle Leishmaniosi* (<sup>1</sup>). (*Culture su mezzo N. N. N. dei parassiti della leishmaniosi nel cane*). Nota I dei dottori BASILE CARLO e VISENTINI ARRIGO, presentata dal Socio B. GRASSI.**

Un cane nato in laboratorio nel giugno 1910 da madre, in cui l'esame ripetuto del midollo osseo era stato negativo per le *Leishmanie*, fu tenuto, in modo rigoroso, lontano da qualsiasi insetto sino al dicembre successivo. Durante questo mese gli furono poste addosso ripetutamente (Basile) delle pulci (*serraticeps* e *irritans*) provenienti da Bordonaro (piccolo villaggio presso Messina) ove erano state raccolte nelle famiglie che tenevano cani in casa.

A Bordonaro, come è noto, è stato descritto nel 1909, dal Gabbi un focolaio endemico di Kala-Azar; ed uno di noi, il Basile, ha riscontrato contemporaneamente una notevole percentuale di cani infetti da parassiti di Leishman. Però, nel tempo in cui furono raccolte le pulci, per quanto a noi consta, in quel villaggio non vi erano casi dichiarati di Kala-Azar.

Il cane, in cui ripetuti esami del fegato e del midollo osseo, eseguiti dal Basile, avevano dato risultato negativo per la presenza di *Leishmanie*, nel gennaio cominciò a dimagrire e la puntura del fegato mostrò qualche raro parassita. L'esame del midollo osseo eseguito molte volte, ha sempre dimostrato, dal marzo in poi, la presenza di *Leishmanie*, benchè scarse.

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma, con sussidio concesso dal Ministero dell'Interno.

Perciò mirando ad avere delle culture dei parassiti di questo cane, infettato per via naturale mediante pulci, noi abbiamo pensato di seminare, nel mezzo Novy-Neal-Nicolle, pezzetti di midollo osseo che abbiamo prelevato in modo asettico dalla tibia, previa disarticolazione tibio-femorale.

In uno dei tubi di cultura, dopo 4 giorni, si è vista in un preparato una sola forma flagellata; però successivi esami dettero, sino all'ottavo giorno dalla semina, esito negativo, tanto che noi ci decidemmo alla puntura splenica ed alla semina di nuovi tubi di cultura con succo splenico aspirato direttamente dalla milza (¹).

Dopo circa 40 ore abbiamo riscontrato, a fresco, parassiti flagellati e dotati di movimento.

Le culture dal midollo osseo, che per alcuni giorni, pur conservandole nel termostato a 20°-22°, non avevamo esaminate, dopo 13 giorni hanno anch'esse presentato uno sviluppo rigoglioso di *Leishmanie* flagellate.

Nei preparati per strisciamento, disseccati, fissati e coloriti con il Giemsa, si osservano parassiti (²) in diversi stadii di evoluzione, che per la loro forma e le loro dimensioni ripetono esattamente i caratteri dei parassiti della Leishmaniosi umana in cultura, e dei parassiti riscontrati da uno di noi, il Basile, nelle pulci *serraticeps* nutrita con succo splenico di un cane affetto da Leishmaniosi (a decorso cronico).

Ed a noi è stato facile il confronto, avendo a disposizione culture gentilmente inviate dal Mesnil (Ist. Pasteur di Parigi) e dal Nicolle (Ist. Pasteur di Tunisi) che noi ringraziamo vivamente, ed altre culture ottenute (³) da uno di noi, il Visentini, da un malato di Kala-Azar, Rocca Vincenzo, proveniente da Bovalino Calabro e ricoverato nella Clinica Medica di Roma.

Questo nostro studio conferma che, almeno nelle regioni Mediterranee, la Leishmaniosi del cane, come hanno già espresso il Nicolle ed uno di noi, il Basile, è, dal punto di vista etiologico, perfettamente identica a quella dell'uomo, perchè identica è la morfologia e la biologia del parassita, sia nell'uomo che nel cane infetti, sia nelle culture sul mezzo N. N. N., ottenute dall'uno e dall'altro. L'identità poi del ciclo di sviluppo del parassita nella pulce *serraticeps* e nelle culture, è una nuova conferma dei risultati delle ricerche e degli esperimenti di uno di noi, il Basile (⁴), che dimostrano che la pulce è, almeno nelle regioni Mediterranee, l'insetto trasmissore del Kala-Azar.

(¹) La puntura della milza fu eseguita dopo aver praticato la laparatomia. La milza si presentò ingrossata, di colorito rosso scuro. Nei preparati per strisciamento del succo splenico, si riscontrano rarissimi parassiti.

(²) Della morfologia del parassita diremo specificatamente in una Nota in esteso.

(³) Le culture sono state ottenute da due punture della milza e sono giunte finora al 14° passaggio.

(⁴) Basile Carlo, Rendic. Acc. Lincei, vol. XIX, 1° sem., fasc. 8°; 2° sem. fasc. 10°; vol. XX, 1° sem., fasc. 1-4-6.

**Patologia. — Sopra l'azione tossica della chinina sui centri nervosi<sup>(1)</sup>.** Nota del dott. MARCO ALMAGIÀ, pres. dal Socio MARCIAFAVA.

L'intento di ottenere una chinina che, pur mantenendo le proprietà terapeutiche, riuscisse più innocua all'organismo, si da potersene somministrare senza timore più alte dosi, rappresenta una vecchia aspirazione dei medici, e stanno a farne fede i tentativi fatti per modificare la struttura chimica della chinina, ottenendone alcuni di quei prodotti, che ebbero il loro momento di voga, ma che non risposero completamente alle speranze.

L'azione tossica della chinina si esplica soprattutto a carico del sistema nervoso, e da ciò appunto dipendono i peggiori sintomi (depressione del cuore e del respiro, sordità, amaurosi), che conseguono a somministrazione di dosi elevate del rimedio.

Che nel cervello di animali e dell'uomo che abbiano ricevuto chinina se ne ritrovi una notevole quantità, è stato dimostrato, ed a me è parso degno di attenzione questo fatto, in quanto, mentre non meraviglia ritrovare l'alcaloide nel fegato e nella milza, che trattengono in maggiore o minore quantità sempre le sostanze tossiche introdotte nell'organismo; o nel rene, che è l'organo pel quale si elimina gran parte della chinina, invece la sua constatazione nel cervello fa ricordare l'assioma, che il veleno si localizza nel tessuto di elezione, cioè là dove esplica la propria azione.

Noi sappiamo di altri veleni che esplicano la propria attività elettiva sul sistema nervoso (tossina del tetano, tossina botulinica, veleno dei serpenti, stricnina), e che appunto nella sostanza nervosa trovano il legame che permette loro di agire sul tessuto. Per alcuni di essi sappiamo che la sostanza nervosa, in toto, o per virtù di singoli suoi costituenti, agisce come detossicante in vetro e nell'organismo. Poteva avvenire alcunchè di simile per la chinina?

Questo fu il punto di partenza delle esperienze, i primi risultati delle quali comunico oggi, riservandomi di seguitare a svolgere completamente il programma propostomi.

Le mie esperienze sono state condotte sul cane, animale sensibilissimo all'azione della chinina. La dose mortale per esso è calcolata in 1 gr. per animali di 5-7 chili e la morte interviene in 1-3 ore, determinando sintomi prima di eccitamento e poi di depressione. Io ho esperimentato da prima l'azione che la sostanza cerebrale esercita in vitro sull'alcaloide e, tralasciando di dire in questa comunicazione preventiva, i dettagli della tecnica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Roma.

dirò subito che, il contatto prolungato delle due sostanze, determina nella chinina una modificazione, per la quale si può iniettarne al cane più che la dose letale, senza che esso muoia. In cinque cani di circa 5 kg. di peso, io ho iniettato fino a gr. 2 e 2  $\frac{1}{2}$  di chinina senza che morissero. In due di essi, alcuni giorni dopo l'iniezione si manifestò amaurosi, transitoria in uno, durevole nell'altro.

Tentai allora di riconoscere quale tra i componenti normali della sostanza nervosa esercitasse la propria azione sulla chinina e cominciai a sperimentare con la lecitina. Dal contatto di questa con l'alcaloide, ottenni lo stesso risultato che con la sostanza cerebrale e cioè potei iniettare fino a 3 gr. di chinina senza che i cani morissero. Un cane di appena 3 kg. ne sopportò gr. 2,5 ed altri due cani di meno che 5 chili, sopportarono due iniezioni, ognuna di 2 gr., ripetute a distanza di 4-5 giorni. Nei parecchi casi così trattati, non si determinò mai cecità.

Da queste esperienze risulta intanto l'affinità che esiste tra la chinina e la sostanza nervosa, ed esse dimostrano come la lecitina sia l'intermediaria del legame. Sulla natura di questo legame, io ancora nulla posso dire con certezza. Altre esperienze che sto facendo potranno stabilire se si tratti di azioni chimiche o di altra natura e diranno anche se la chinina così unita alla lecitina e da essa resa meno tossica, mantenga inalterate le proprietà farmacologiche, chè in questo caso utile potrebbe esserne l'applicazione all'uomo in alcune infezioni da protozoi.

**Chimica. — *Gli arseniuri di stagno*** <sup>(1)</sup>). Nota di N. PARRAVANO e P. DE CESARIS, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Di composti dello stagno con l'arsenico se ne trovano indicati parecchi nella letteratura.

Descamps <sup>(2)</sup> riscaldando in un eroghiulo, stagno con un eccesso di arsenico e proteggendo il miscuglio con acido borico ottenne un arseniuro a cui assegnò la formola  $\text{Sn}_2\text{As}_3$ .

Spring <sup>(3)</sup> compresse insieme stagno ed arsenico sotto forti pressioni, e riuscì a farli combinare avendo così un arseniuro che indicò con la formola  $\text{Sn}_3\text{As}_4$ .

Stead <sup>(4)</sup> da un miscuglio fuso di stagno ed arsenico, facendolo solidificare in parte, separò cristalli di un arseniuro, per il quale ritenne proba-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

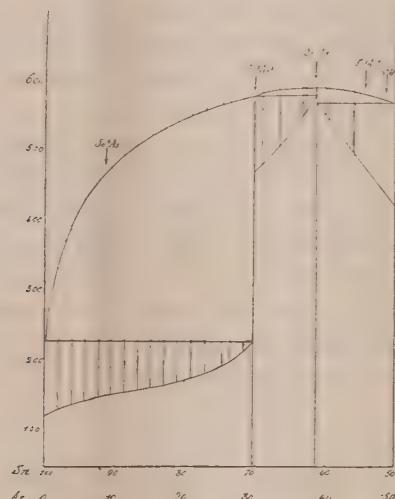
<sup>(2)</sup> C. R. 86, 1065 (1878).

<sup>(3)</sup> Berichte, 16, 324 (1883).

<sup>(4)</sup> Jour. of the Soc. of the Chem. Ind. 16, 206 (1897).

bile la formola  $\text{Sn}_3\text{As}_2$  in analogia col fosfuro di stagno di composizione simile da lui pure preparato.

Headden (<sup>1</sup>) infine, analizzando alcuni prodotti trovati in un antico forno, dove erano stati lavorati minerali di stagno, trovò fra l'altro un arseniuro di stagno — impuro di stagno — al quale, in base all'analisi, credette dover assegnare la formola  $\text{Sn}_6\text{As}$ . Stevanović (<sup>2</sup>) ha eseguito alcune misure cristallografiche sopra cristalli di presunto  $\text{Sn}_6\text{As}$ ; ma disgraziatamente questo autore nulla dice di aver fatto per assicurarsi che i cristalli da lui studiati sono effettivamente quelli di un composto definito  $\text{Sn}_6\text{As}$ .



A questi diversi arseniuri corrispondono le seguenti percentuali di stagno in essi contenute:

$\text{Sn}_6\text{As}$	$\text{Sn}_3\text{As}_2$	$\text{Sn}_3\text{As}_4$	$\text{Sn}_2\text{As}_3$
90,49	70,41	54,34	51,40

Le indicazioni sopra riportate circa gli arseniuri di stagno rimontano però tutte ad un'epoca in cui per decidere se in casi simili si avesse o no a che fare con composti si adoperavano come criteri, la forma cristallina, il peso specifico e la composizione chimica. Se si trovava che questa corrispondeva a rapporti semplici si concludeva senz'altro di avere a che fare con un composto. Oggi però questi criteri non sono più sufficienti e la questione si può decidere solo studiando il diagramma di fusione e facendo l'esame metallografico delle leghe.

(<sup>1</sup>) Chem. Central. 1908, 1, 602.

(<sup>2</sup>) Zeit. für Krystall. 40, 326 (1905).

Noi perciò ci siamo voluti servire di questi mezzi per risolvere la questione dei composti che lo stagno e l'arsenico formano tra loro. L'esposizione dettagliata delle ricerche da noi eseguite la faremo altrove; qui ci limitiamo semplicemente a riportare il diagramma di stato da noi stabilito per il sistema stagno-arsenico.

Il punto di fusione dello stagno non viene quasi affatto abbassato dall'aggiunta di arsenico, almeno praticamente, dati i mezzi di ricerca da noi adoperati. La curva di equilibrio sale in maniera continua dal punto di fusione dello stagno, prima rapidamente e poi più lentamente, fino a circa il 71-70 % di stagno; qui cambia direzione e si svolge quasi pianeggiante per tornar quindi lentamente ad abbassarsi.

Oltre questa curva di fusione sono disegnate nel diagramma tre orizzontali eutettiche, la prima a 22°, la seconda a 575° e la terza a 565°. Queste tre orizzontali dimostrano la presenza nel nostro sistema di due composti.

La composizione del primo si stabilisce facilmente: essa corrisponde a quei valori di percentuale a cui si annulla l'eutettico a 228° ed a cui corrisponde il limite dell'ascesa continua della curva di fusione, cioè all'incirca il 70 % di stagno, il che porta alla formola  $\text{Sn}_3\text{As}_2$  per questo arseniuro per il quale si calcola 70,41 % di Sn.

Più difficile ci è stato lo stabilire la formola dell'altro composto per la forma pianeggiante che ha la sua curva di fusione. La sua composizione però risulta evidente dal diagramma: in corrispondenza di essa si annullano i due arresti a 575° da una parte ed a 565° dall'altra. Questo succede ad una concentrazione di circa il 61 % di stagno alla quale corrisponde l'arseniuro di formola SnAs che contiene il 61,34 % di stagno.

Il comportamento delle leghe di questo campo in cui esiste SnAs (dal 70 al 50 %) non è però dei più semplici a definirsi per i soprarraffreddamenti che si verificano in corrispondenza dell'inizio della solidificazione, e per la piccola differenza tra le diverse temperature critiche, in maniera che solo esperienze eseguite con gran cura ci hanno permesso di ben precisarlo.

L'eutettico  $\text{Sn}_3\text{As}_2 + \text{SnAs}$  praticamente coincide con la composizione di  $\text{Sn}_3\text{As}_2$ , allo stesso modo che l'eutettico  $\text{Sn}_3\text{As}_2 + \text{Sn}$  abbiamo visto che coincide con Sn, e questo è anche confermato, dalla struttura del solido di separazione secondaria che si trova nei miscugli tra il 70 ed il 61 % di Sn. Perciò a partire da  $\text{Sn}_3\text{As}_2$  la curva di fusione per aggiunta di arsenico torna a salire, ma di poco, e poi si mantiene quasi piana: questo andamento evidentemente è dovuto al fatto che SnAs che qui si separa è fortemente dissociato nelle masse fuse (¹).

(¹) Vedi van t'Hoff, Vorlesungen, I, 62 (1901); Kremann, Ahrens Sammlung, 14, 234.

Le leghe tra il 70,41 % ed il 61,34 % di Sn incominciano a solidificare (spesso con sopraraffreddamenti anche notevoli che non sempre si eliminano agitando) a temperature oscillanti di poco intorno a 585°, continuano a cristallizzare in un intervallo di circa 10° e completano la solidificazione a 575°, dove la caduta della temperatura subisce un arresto. Le leghe invece che contengono meno del 61,34 % di stagno incominciano pure esse a solidificare intorno ai 585°, ma, a differenza di prima, la cristallizzazione continua ora a compiersi in un intervallo di circa 20° fino a 565° dove la temperatura si arresta fino a completa solidificazione.

Lo studio micrografico di queste leghe da noi pure eseguito conferma l'esistenza nel nostro sistema dei soli due composti  $\text{Sn}_3\text{As}_2$  ed  $\text{AsSn}$  i quali vengono così ad essere i due soli arseniuri di cui è accertata l'esistenza. Gli arseniuri  $\text{Sn}_6\text{As}_3$  ed  $\text{Sn}_2\text{As}_3$  di cui parlano precedenti autori non compaiono nel nostro diagramma. Quanto ad  $\text{Sn}_6\text{As}$  la questione della sua esistenza può risolversi esaminando al microscopio la struttura dei cristalli studiati da Stevanović, e che sono conservati nella collezione mineralogica di Monaco (¹); però, siccome essi sono stati trovati in un antico forno dove si lavoravano minerali di stagno, non potrebbero essersi formati altro che per fusione di stagno con arsenico, e perciò noi possiamo asserire con ogni probabilità che o i cristalli esaminati da Headden non corrispondono ad un composto definito, o, se così non è, la composizione non ne può essere quella ad essi assegnata da questo autore. Similmente gli altri due arseniuri che, a detta degli autori che li hanno descritti si formerebbero o comprimendo (²) ( $\text{Sn}_3\text{As}_4$ ) o fondendo assieme ( $\text{Sn}_2\text{As}_3$ ) stagno ed arsenico si possono senza altro cancellare dalla letteratura chimica.

Perciò gli arseniuri di stagno, di cui queste nostre ricerche hanno svelato l'esistenza e stabilità la composizione, sono  $\text{Sn}_3\text{As}_2$  ed  $\text{SnAs}$ .

(¹) Stevanović, loc. cit.

(²) Sulle formazioni di leghe per mezzo di forti pressioni, vedi Masing, Zeit. Anorg. Ch. 62 265 (1909); Tammann, Zeit. Elektro., 15, 447 (1909).

Chimica. — *I sistemi binarii CuCl-AgCl, CuCl-NaCl, CuCl-KCl*<sup>(1)</sup>.  
Nota di P. DE CESARIS, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Allo scopo di stabilire eventuali relazioni di isomorfismo tra il cloruro rameoso ed i cloruri degli elementi monovalenti del primo gruppo del sistema periodico, avevo intrapreso lo studio del comportamento termico delle miscele binarie di CuCl con AgCl, NaCl, KCl. Avevo già da tempo portato a termine questo studio, quando nel fascicolo 6° di questi Rendiconti sono comparsi contemporaneamente due lavori sullo stesso argomento, dei signori Sandonnini<sup>(2)</sup> e Poma<sup>(3)</sup>.

I due lavori si corrispondono perfettamente per quel che riguarda il sistema CuCl-AgCl riportato in entrambi; non sono però completamente d'accordo per quel che riguarda il sistema CuCl-KCl, perchè il Poma non crede di poter assegnare con assoluta certezza la formola  $2\text{KCl} \cdot \text{CuCl}$  al composto a cui i due componenti danno origine. Credo perciò non sia del tutto privo di interesse il far noti sommariamente anche i risultati che avevo ottenuti nelle mie ricerche.

Le esperienze le ho eseguite tutte con 30 gr. di miscuglio dei due sali in forno elettrico a resistenza di nikel di mia costruzione. La lettura delle temperature è stata fatta con una pinza Pt-Pt Rh di 0,2 mm. di spessore, e con un galvanometro Siemens.

Il cloruro di sodio ed il cloruro di potassio erano prodotti puri di Merck e sono stati ricristallizzati; il cloruro d'argento l'ho preparato a partire dall'argento puro, ed il cloruro rameoso l'ho ottenuto da cloruro rameico con eccesso di solfato di sodio. Mi sono accertato con l'analisi della purezza del cloruro rameoso adoperato.

I dati per il sistema CuCl-AgCl concordano bene nei due lavori sopracitati. Mi limito perciò a riportare qui solo alcuni risultati delle mie esperienze. Per AgCl ho trovato 454° come punto di fusione; l'eutettico corrisponde a circa il 44% di CuCl, e le concentrazioni dei cristalli misti limiti corrispondono a circa il 7 ed il 10% di CuCl. Questi numeri, come si può vedere, concordano bene con quelli di Sandonnini e di Poma.

Sandonnini solo ha studiato il sistema CuCl-NaCl. Siccome i miei risultati, pur concordando nell'insieme con quelli di questo autore, presentano qualche piccola differenza nei valori delle temperature, credo opportuno di riportarli.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Rend. Acc. Lincei [5], 20, 457.

<sup>(3)</sup> Id. id. [5], 20, 464.

Percentuale in peso in NaCl	Temp. iniziale di cristallizzazione	Temperatura eutettica	Tempi di arresto eutettico in secondi
100	796°	—	—
90	775	—	—
80	755	322	120
70	723	324	195
60	680	324	315
50	610	321	390
40	545	320	450
30	440	324	525
20	—	325	555
14	350	324	300
10	370	322	60
5	395	—	—
0	420	—	—

Se con questi numeri si costruisce il diagramma di stato, si ha una figura che somiglia molto a quella del Sandonnini, ma differisce un poco in alcuni valori. La curva di fusione secondo le mie esperienze si svolge a temperature un poco più basse di quelle indicate da detto autore; l'eutettico corrisponde ad una composizione di circa il 18 % di NaCl, ed i cristalli misti limiti che si separano eutetticamente a 322 hanno le concentrazioni di circa il 15 ed il 92 % di CuCl.

Il sistema CuCl-KCl è stato studiato sia da Sandonnini che da Poma. Il primo assegna senz'altro al composto che CuCl e KCl formano fra loro, la formola CuCl<sub>1.2</sub>KCl, mentre che il secondo non crede di poter affermare con assoluta certezza che questa sia la composizione del composto che si rivela nel diagramma di fusione.

Le mie esperienze confermano pienamente i risultati del Sandonnini, come si può rilevare dalla tabella che segue, in cui sono riportati i risultati da me ottenuti.

Perc. in peso in KCl	Temp. iniziale di cristall.	Temp. del 1° arresto	Tempi del 1° arresto in secondi	Temp. del 2° arresto	Tempi del 2° arresto in secondi
100	774°	—	—	—	—
90	745	245°	120	138°	60
80	705	250	180	138	120
75	670	245	195	139	135
70	640	248	225	141	150
60	550	245	300	140	180
50	450	246	195	138	240
45	390	246	90	144	285
40	300	242	60	138	360
35	225	—	—	142	450
30	165	—	—	140	600
25	190	—	—	140	570
20	260	—	—	140	375
10	250	—	—	140	150
5	390	—	—	138	75
0	420	—	—	—	—

Salvo piccole differenze in qualcuna delle temperature iniziali di solidificazione, nel valore della temperatura di scomposizione di  $2\text{KCl} \cdot \text{CuCl}$  e dell'eutettico  $\text{CuCl} + 2\text{KCl} \cdot \text{CuCl}$ , questi miei valori concordano pienamente con quelli del Sandonnini e portano ad assegnare con tutta certezza la formula  $\text{CuCl} \cdot 2\text{KCl}$  al composto che qui compare.

Non riporto la figura del diagramma che si potrebbe costruire con i miei numeri, perchè essa è quasi coincidente con quella già pubblicata dal Sandonnini.

Ho in corso esperienze simili col bromuro rameoso sulle quali spero poter riferire fra breve.

**Citologia. — Sugli Elaioplasti nelle Mono- e Dicotiledoni.**  
Nota preliminare (<sup>1</sup>) del dott. JOANNES POLITIS di Atene, presentata dal Socio G. BRIOSI

Nel 1888 il Wakker notò per primo, entro il citoplasma delle cellule epidermiche delle giovani foglie di *Vanilla planifolia* e di *Vanilla aromatica latifolia*, dei corpi speciali fortemente rinfrangenti la luce, ai quali diede il nome di Elaioplasti (formatori di olio) perchè essi constano di una sostanza fondamentale plasmatica nella quale trovansi incluse sostanze grasse od oleose.

Circa cinque anni dopo, lo Zimmermann, avendo rinvenuto nel perianzio della *Funkia coerulea* corpi simili, riprese lo studio dell'argomento, ed esaminò molte specie appartenenti a un gran numero di famiglie tra le Monocotiledoni, studiando gli elaioplasti dal punto di vista morfologico e della loro diffusione. Risultato di queste ricerche fu, che egli trovò gli elaioplasti in cinque altri generi, dei quali tre fra le Liliacee, uno tra le Amarillidacee ed uno tra le Orchidacee.

Il primo peraltro a studiare lo sviluppo dei corpi in questione fu Raciborski nel 1893, nei generi *Ornithogalum*, *Albuca*, *Funkia* e *Gagea*.

Il Raciborski notò, che quivi gli elaioplasti appaiono come piccole sfere fortemente rifrangenti la luce sempre addossate al nucleo cellulare; che essi non partecipano alla divisione nucleare, e che si moltiplicano per neoplasia dal citoplasma. Nell' *Ornithogalum umbellatum* gli elaioplasti si moltiplicherebbero, secondo lo stesso autore, per gemmazione.

Più tardi lo Zimmermann constatò la presenza degli elaioplasti nel cilindro centrale, e nel tessuto assimilatore sottoepidermico del *Psilotum*, nell' epidermide interna delle foglie del perianzio della *Maxillaria picta*, nel-

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia. Il lavoro definitivo corredata di tavole verrà pubblicato negli *Atti dell'Istituto Botanico di Pavia*.

l'epidermide e nel sottostante parenchima del perianzio e dell'asse fiorale della *Beschorneria bracteata*.

In fine il Küster, paragonando gli elaioplasti ai corpi oleosi dei Muschi, trovò che i primi differiscono dai secondi per il comportamento del loro stroma e della sostanza oleosa, mentre somigliano ad essi per la struttura.

Col lavoro del Küster si chiude la serie delle pubblicazioni che, per quanto mi consta, vennero fatte sugli elaioplasti, i quali, come si vede, furono riscontrati solo in pochissimi generi di Monocotiledoni cioè cinque di Liliacee, due di Amarillidacee e tre di Orchidacee.

Nelle Dicotiledoni, nessuno ha trovato elaioplasti <sup>(1)</sup>.

Nell'anno scorso, riscontrai nelle cellule epidermiche delle squame dei bulbi in attività funzionale di *Hippeastrum aulicum*, dei corpi sferici fortemente rinfrangenti la luce, riuniti in forma di grappolo, i quali per le proprietà fisiche e le reazioni microchimiche si dimostravano identici a quelli che il Wakker, lo Zimmermann, il Raciborski, descrissero col nome di elaioplasti.

Questo fatto mi spinse ad ulteriori ricerche, i cui risultati brevemente riassumo nella presente Nota.

Ho studiato moltissime specie appartenenti alle più disparate famiglie del regno vegetale, ed ho constatato la presenza degli elaioplasti in 27 nuovi generi; appartenenti tra le Monocotiledoni, oltre che alle Liliacee, Amarillidacee e Orchidacee, anche alle Iridacee ed alle Dioscoreacee; e per di più anche in alcune Dicotiledoni cioè in tutte le specie che ho studiato della famiglia delle Malvacee.

Elaioplasti ho trovato nelle seguenti specie:

LILIACEAE: *Aloë rhodacantha*, Dc., *Drimia undulata* Jacq., *Yucca filamentosa* Linn., *Ruscus racemosus* Linn.

AMARYLLIDACEAE: *Clivia nobilis* Lindl., *Eucharis subdentata* Benth., *Himantophyllum cyrtanthiflorum* Groenl., *Himantophyllum miniatum* Groenl., *Hippeastrum aulicum* Herb., *Hippeastrum vittatum* Herb., *Hippeastrum reticulatum* Herb., *Haemanthus albiflos* Facq., *Haemanthus coccineus* Linn., *Sternbergia Fischeriana* Rupr., *Polianthes tuberosa* Linn.

IRIDACEAE: *Watsonia humilis* Mill.

DIOSCOREACEAE: *Dioscorea sativa* Linn., *Dioscorea sinuata* Vell., *Dioscorea divaricata* Blanco, *Dioscorea Decaisneana* Carr.

ORCHIDACEAE: *Eria stellata* Lindl., *Cattleya Harrisoniae* Paxt., *Laelia anceps* Lindl., *Lycaste aromatica* Lindl., *Lycaste Skinneri* Lindl., *Miltonia*

(<sup>1</sup>) Gli organi riscontrati dal R. Beer (On elaioplasts — Ann. Bot. XXIII, 63 — 1909) in diverse parti del fiore di una *Gaillardia* non possono, secondo me, ascriversi agli elaioplasti.

*Clowesii* Lindl., *Tetramicra bicolor* Rolfe, *Cymbidium aloifolium* Sw.,  
*Cymbidium Lowianum* Reichb.

MALVACEAE: *Hibiscus Rosa-sinensis* Linn., *Hibiscus herbaceus* Vell.,  
*Hibiscus liliiflorus* Cav., *Hibiscus tricolor* Dehnh., *Hibiscus syriacus* Linn.,  
*Althaea rosea* Cav., *Malva rotundifolia* Cav., *Malva sylvestris* Linn.,  
*Gossypium arboreum* Parl., *Goethea caulinflora* Nees.

Nelle specie da me esaminate, gli elaioplasti trovansi entro il citoplasma ora addossati al nucleo, ora lontani da questo. Allo stato adulto essi si presentano generalmente sotto forma di piccole sfere raccolte in gruppo; raramente sotto forma di un'unica sfera. Durante il loro sviluppo possono assumere diverse forme, ma per lo più in una stessa specie ne predomina una sola, dipendente dal numero e dalla grandezza delle sferette che la compongono.

Lo Zimmermann osservò che nel perianzio della *Funkia coerulea* gli elaioplasti posseggono un movimento attivo di traslazione e di rotazione, che anch'io riscontrai spesso, e che osservai essere caratteristico degli elaioplasti a forma di grappolo.

Per ciò che riguarda la sede degli elaioplasti, notai che, salvo qualche rara eccezione, essi si trovano nell'epidermide degli organi fiorali. La loro presenza negli altri organi è incostante.

La moltiplicazione può avvenire in tre modi. Per neoplasia dal protoplasma, o per gemmazione, o per divisione che direi passiva. La prima costituisce il modo normale di moltiplicazione: la seconda è più rara; la terza in fine rappresenta un'eccezione, ed è collegata alla bipartizione della cellula. Un esempio tipico di moltiplicazione per gemmazione osservai nell'epidermide delle squame dei giovani bulbi di *Ornithogalum caudatum*; di divisione passiva nelle cellule in divisione dell'epidermide dell'asse fiorale, dell'ovario e delle foglie perigoniali di *Polianthes tuberosa*.

Per quanto concerne lo studio biologico degli elaioplasti, allo scopo di sorprendere i vari stadii del loro sviluppo, ed assegnare loro per quanto è possibile il significato funzionale, le mie osservazioni furono ripetute, oltre che sugli organi vegetativi di molte Liliacee ed Amarillidacee, anche sopra i loro bulbi, esaminati in diverse condizioni, sia riguardo all'età del bulbo, sia al suo stato di attività vegetativa o di riposo. Gli autori che mi precedettero nello studio degli elaioplasti non poterono studiare tutte le fasi del loro sviluppo, poichè nessuno si è occupato degli organi di riserva.

Dalle ricerche da me fatte sulle specie bulbose in cui trovai elaioplasti, si deduce:

1° Che gli elaioplasti, oltre che negli organi vegetativi, si possono trovare nell'epidermide esterna di tutte le squame del bulbo.

2° Che gli elaioplasti nei bulbi, dopo breve esistenza, degenerano, poi scompaiono.

3° Che delle due sostanze di cui consta l'elaioplasta, la prima a scomparire è l'oleosa, mentre la proteica persiste per diverso tempo.

4° Che nei bulbi in riposo gli elaioplasti si presentano senza determinata struttura ed assumono forme varie, che sono da considerarsi come rappresentanti le ultime fasi del loro sviluppo.

5° Che in ogni ripresa dell'attività funzionale del bulbo, si formano in esso nuovi elaioplasti.

Forme di elaioplasti singolarmente particolari rilevai in alcuni bulbi di *Hippeastrum aulicum* e di *Ornithogalum caudatum*.

ORIGINE E SIGNIFICATO MORFOLOGICO. — Raciborski ammette che gli elaioplasti traggano la loro origine da una secrezione di citoplasma; io invece ritengo che siano di origine nucleare. Tale ipotesi è convalidata sia dal fatto che gli elaioplasti appaiono per la prima volta addossati al nucleo, sia dalla natura chimica della loro sostanza fondamentale che si comporta verso i solventi ed i reattivi colorati come la sostanza dei nucleoli, come io ho potuto constatare.

Per quanto concerne il significato morfologico degli elaioplasti si hanno le seguenti opinioni. Secondo Wakker essi deriverebbero probabilmente da un metamorfismo dei cloroplasti. Questa opinione, come osserva Raciborski, è contrastata dal fatto che essi hanno diverso modo di moltiplicarsi.

Lo Zimmermann trova in molti casi che gli elaioplasti mostrano una manifesta somiglianza con organismi fungini e per conseguenza non esclude che si tratti di un caso di parassitismo o di simbiosi. Tale opinione venne più tardi combattuta dal Raciborski, il quale, dallo studio che fece sullo sviluppo degli elaioplasti negli organi vegetativi delle Liliacee, giunse alla conclusione che essi devono considerarsi come organi normali delle rispettive cellule. Io, non avendomai potuto riscontrare la formazione di spore nei numerosi casi in cui osservai gli elaioplasti, non credo si possa appoggiare l'opinione dello Zimmermann.

Inoltre, se si trattasse d'un parassitismo, i corpi sferici che costituiscono l'elaioplasta dovrebbero presentare la caratteristica struttura della cellula. Una tale struttura non ho potuto mai distinguere nei molteplici preparati che ho fatto, neanche nei casi in cui essi si presentano di notevole grandezza, pur servendomi di obbiettivi ad immersione fortissimi e di oculari compensatori.

Si può ancora aggiungere che se si trattasse di un organismo parassita esso non avrebbe la costituzione chimica caratteristica che si presenta negli elaioplasti, e comparirebbe dovunque nel citoplasma, e non costantemente solo accanto al nucleo.

Ho cercato anche di coltivare gli elaioplasti collocando delle sezioni sottilissime dell'epidermide esterna delle squame di bulbi di *Hippeastrum aulicum* e di *Haemanthus albiflos*, in adatti mezzi nutritizii (soluzioni di zue-

cherò variamente concentrate, soluzione Knop e gelatina). Nei tentativi fatti essi non hanno mostrato la minima tendenza ad accrescere, e dopo alcuni giorni cominciavano a degenerare.

**SIGNIFICATO BIOLOGICO.** — Le ricerche dello Sthal sui muschi tenebrebbero a dimostrare che i corpi oleosi (Oelkörper) di queste piante servono come organo di difesa contro il morso delle lumache. Raciborski ritiene che si possa attribuire anche agli elaioplasti simile funzione, basandosi sulle sue osservazioni che gli assi fiorali di alcune specie di *Gagea* e di *Ornithogalum* non vengono mangiati dagli animali sopra detti, quando essi giacciono in terra appassiti, mentre le foglie non sono rispettate.

Tale ipotesi non mi sembra probabile, poichè occorre notare, che gli elaioplasti si sviluppano ed entrano in funzione solo in un dato periodo dell'evoluzione dell'organo nel quale si trovano; poi scompaiono. Quindi essi sarebbero incapaci di proteggere un organo qualunque per tutta la sua vita, contro qualsiasi erbivoro. Inoltre, anche l'osservazione diretta esclude completamente che gli elaioplasti abbiano una funzione di difesa, poichè vennero da me trovate delle foglie di *Malva* (in cui gli elaioplasti erano presenti) rôse dalle lumache.

Gli elaioplasti in fine non possono essere ritenuti come prodotto diretto dell'assimilazione clorofiliana, poichè si formano anche negli organi sotterranei privi di clorofilla.

**CONCLUSIONI.** — I principali risultati delle mie ricerche si possono così riassumere:

1º Ho rinvenuto elaioplasti in 30 nuove specie riferentisi a 22 nuovi generi di monocotiledoni.

2º Ho trovato che si hanno elaioplasti anche in alcune dicotiledoni (ove non se ne erano mai trovati) cioè nelle Malvacee, l'unica famiglia fra le tante da me esaminate che ne possegga.

3º Gli elaioplasti non si debbono ritenerne nè come parassiti (come vuole Zimmermann) nè come organi di difesa (come ritiene Raciborski), ma come organi specifici delle cellule in cui si formano e il cui compito è quello di elaborare sostanze oleose nutritizie.

4º La sostanza fondamentale degli elaioplasti è da ritenersi simile alla sostanza dei nucleoli.

5º Nei bulbi si formano nuovi elaioplasti ad ogni ripresa della loro attività vegetativa.

E. M.

